مقدمة في التحليل

نظرية حساب
التفاضل و التكامل

تأليف

ج. أ. فريدي

ترجمة

د. أحمد صادق القرماني

د. رمضان محمد إجهيمة



المراجعة العلمية

د. علي الرويني

د. محمد سالم المرابي

المراجع النحوي

أ. علي سلامة

منشورات جامعة الفاتح

Introductory Analysis

The Theory of Calculus

J.A. Fridy

(Kent State University)

Translated by

Dr. A. El Karamany **Dr. Ramadan Ghema**

Al Fateh University

Tripoly

1991

الطَّبعَة الأولىٰ
1992 م

رقم الايداع 1233/92

بدار الكتب الوطنية

منشورات جامعة الفاتح
ادارة المطبوعات والنشر وشؤون المكتبات

ص.ب. : 13543
فاكس : 608830
تلكس : 20629

الجماهيرية العظمى

المحتويات

الفصل الثالث
كمال الأعداد الحقيقية

الفصل الرابع
الدوال المتصلة

الفصل الخامس
نتائج الاتصال

الفصل السادس
المشتقة

الفصل السابع
تكامل ريمان

الفصل الثامن
التكاملات المعتلة

الفصل التاسع
المتسلسلات غير النهائية

الفصل العاشر
تكامل ريمان ـ إستيلتيس

الفصل الحادي عشر
متتاليات الدوال

الفصل الثاني عشر
متسلسلات القوى

الفصل الثالث عشر
القضاءات المترية والفضاءات الاقليدية

الفصل الرابع عشر
التحويلات المتصلة

الفصل الخامس عشر
حساب التفاضل في الفضاءات الاقليدية

الفصل السادس عشر
المساحة والتكامل في E^2

مقدمة الطبعة العربية

نقدم للقارىء العربي ترجمة هذا الكتاب في التحليل الرياضي، وهو موضوع على جانبٍ كبيرٍ من الأهمية لأنه يتناول بالدراسة، الأسس الذي تبنى عليها معظم الاستنتاجات الرياضية التي تستخدم في مجالات العلوم التطبيقية.

وقد اخترنا هذا الكتاب لأنه يعتبر مرجعاً مدرسياً في التحليل الرياضي يعرض الموضوع في سلاسة ووضوح، ويحتوي على عدد كبير من الأمثلة.

لقد تم التقيد بالمصطلحات التي شاعت ورسخت في اللغة العربية وتعود عليها الطالب خلال دراسته في مرحلة التعليم ما قبل الجامعي، آخذين في الاعتبار توصيات مكتب تنسيق التعريب في الرباط، والمراجع في العلوم الرياضية الصادرة باللغة العربية. وقد أضيف ملحق خاص بالمصطلحات العلمية في آخر الكتاب. ونرجو بتقديمنا لهذه الترجمة أن نكون قد ساهمنا مساهمة متواضعة في اغناء المكتبة العربية بالكتب القيّمة، خاصة وأن هناك نقصاً ملحوظاً في كتب التحليل الرياضي الجيدة باللغة العربية، على الرغم من أن استيعاب المفاهيم الدقيقة سيكون أشمل إذا درست باللغة الأم.

ويسعدنا أن نتقدم بخالص الشكر للزميلين: الدكتور علي صالح الرويني، والدكتور محمد سالم باني، اللذين قاما بمراجعة هذه الترجمة وللملاحظات التي أبدياها، فكانت ذات نفع في إخراج الكتاب بهذه الصورة.

د. أحمد صادق القرماني — د. رمضان محمد اجهيمة

جامعة الفاتح

طرابلس 1990/10/30 م

مقدمة المؤلف

يحتوي هذا الكتاب «مقدمة في التحليل: نظرية حساب التفاضل والتكامل» على العرض النظري لمفاهيم التفاضل والتكامل التي قدمت بطريقة بديهية في المنهج الأول للتفاضل والتكامل الذي يُدرّس للطالب المبتدىء، أو طالب السنة الثانية في أية كلية جامعية.

ويهدف هذا الكتاب لأن يكون مرجعاً مقرراً لمنهج نظري يُدرَّس عادة في السنوات الدراسية الأخيرة، ومثل هذا المنهج يسمى عادة بالتفاضل والتكامل المتقدم، أو مقدمة في التحليل، أو غير ذلك.

والكتاب «مقدمة في التحليل: نظرية حساب التفاضل والتكامل» يحتوي على مادة كافية لفصلين دراسيين معروضين بسرعة معقولة، ويمكن أن يدرّس لفصل واحد بتغطية الأبواب من 1 - إلى 8، بالإضافة إلى بعض الأبواب القليلة الأخرى وفقاً لاختيار أستاذ المادة.

قدمت موضوعات الكتاب بمستوى معقول لطلبة الجامعات؛ وذلك بتقديم معظم النظريات في مجموعة الأعداد الحقيقية المألوفة، وذلك على خلاف الصياغة الأكثر عمومية أو تجريداً، وبذلك يستطيع الطالب الذي يتعلم لأول مرة، كيف يكتشف البراهين الرياضية ويكتبها، وكيف يلجأ إلى خبرته السابقة للحصول على أمثلة توضح الموقف بجلاء. وبعد أن يكتسب الطالب خبرة معينة في عرض البراهين الرياضية واستيعابها في صياغة معينة، فإن النظريات المجردة ستصبح أكثر فهماً وقبولاً.

إن أحد أهداف الطالب في هذا المستوى يجب أن يكون اكتساب المهارة في كتابة الرياضيات؛ ولهذا فإن أسلوب عرض هذا الكتاب يهدف إلى توضيح الكتابة الرياضية

الصورية على خلاف اللاصورية التي تقابلنا عادة في كتب التفاضل والتكامل الأولية. وليس هذا صحيحاً للمقولات والبراهين الصورية فحسب، بل أيضاً للمناقشات العامة، وهو أمرٌ ليس طارئاً أو عرضياً. ومع الاحتفاظ بمستوى وأسلوب عرض المادة يحتوي الكتاب على عدد قليل من الأشكال البيانية. وهذا أمر نمطي في رأيّ، ومرغوب فيه في المقررات المتقدمة للنظرية الرياضية. وفي هذه المرحلة يجب على الطالب أن يفهم أن طريقة الأشكال البيانية لا تكون برهاناً، فالأشكال البيانية في الكتاب ـ مثلها مثل الأشكال الأخرى التي يجب أن يتشجع الطالب ويرسمها ـ لا تعتبر إلا حثّاً للطالب على الدراسة الممتعة ولكنها ليست جزءاً أساسياً من المنطق.

وتُعْطَى مجموعات التمارين، الواردة في نهاية كل بند تقريباً، للطالب ليختبر قدرته على اكتشاف وكتابة الرياضيات على السواء. وتظهر بعض المسائل الروتينية في بداية معظم التمارين المفيدة وهي التي تتطلب برهاناً أو تفصيلاً لمثال ما. وعلى الرغم من أن مثل هذه التمارين ليست ضرورية لبرهان النتائج التي ترد بعد ذلك إلا أنها تضيف تفاصيل مهمة للنظرية، وتكسب الطالب خبرة؛ لأن الطالب يجب أن يكون ملماً بمفاهيم ورموز نظرية المجموعات دون تفسير اضافي. وبالإضافة إلى رمزي الاتحاد والتقاطع نستخدم الرمز $\sim S$ لمكمّلة S و $T \sim S$ للمكمّلة النسبية: $T \sim S = T \cap (\sim S)$.

ويبدأ عرض النظرية في الباب الأول بتعريف ترتيب الأعداد الحقيقية R وتقديم مسلمة أصغر حد أعلى (كل الخواص الحسابية للمجال R مفترضة) والسمة الخاصة التي تطبع هذه المعالجة للموضوع هي ترتيب المفاهيم المختلفة للنهاية. ففي الباب الثاني تكون نظرية النهايات الأولى المعروضة هي المتعلقة بتقارب متتاليات الأعداد، وهي الأسهل في التعامل معها بواسطة عمليات $\delta - \varepsilon$ الدقيقة. كما أنه يسهل توضيحها بالأمثلة. وتستخدم نهايات المتتاليات لعرض وتوضيح مفاهيم التقارب الأخرى، التي تضمن الاتصال ونهايات الدوال والاتصال المنتظم والمشتقات والتكاملات والمتسلسلات اللانهائية ومتتاليات الدوال ومتسلسلات القوى. ومع كمال $\mathbb{R}$ وهو موضوع الباب الثالث تشكل مفاهيم النهاية هذه، محتويات الأبواب من 1 الى 12. وفي الباب الرابع نجد تناولاً غير عاديٍ، حيث يدرس في البداية مفهوم الدالة المتصلة وبعد ذلك يستخدم الاتصال لتعريف نهاية الدالة. وقد تم اختيار هذا الترتيب للموضوعات، لأن الدوال المتصلة تبدو للطالب طبيعية أكثر من الدوال غير المتصلة التي تعرض النهاية بواسطتها. وبالإضافة إلى تكامل ريمان الذي يدرس في الباب السابع، يقدم تكامل ريمان ـ إستلتيس Stieltjes في الباب العاشر. وفي الباب الحادي عشر

.. نظرية ڤيرشتراس للتقريب كمثال على التقارب المنتظم لمتتالية الدوال.

. خصص الأبواب الأربعة الأخيرة لدراسة النظرية متعددة الأبعاد، وهي تبدأ بدراسة .... ات المترية. وهذا الموضوع هو الوحيد المقدم في صياغة مجردة، وحتى في هذه الحالة .. نظرية الفضاءات المترية، بشدة نحو الفضاءات الاقليدية.

.. في البابين الرابع عشر والخامس عشر نعرض لمفاهيم الاتصال والقابلية للتفاضل في ...اء الاقليدي نوني الأبعاد، ولكن دراسة التكاملات المتعددة في الباب الأخير تقتصر على .ظرية في بعدين وهنا نستعين في تناولنا بمحتوى جوردان (Jordan) عن طريق المساحة .. حلية والخارجية للفئات في المستوى، وهذا انما يمنح خلفية مفيدة للطلبة الذين سيدرسون ... ية ليبيج Lebesgue للقياس.

إن كتاباً على هذا النمط سيكون بالطبع متأثراً بخبرة المؤلف خلال سنوات طويلة من .. سته كطالب وعمله كمدرس وأستاذ للمادة. وأنه لمن المستحيل القيام بتعداد من كان ذو .. على هذا الكتاب من أساتذة ومراجع خوفاً من اغفال دور البعض. ولذا فإنني أقدم تعبيراً ...ما عن الشكر بالعرفان لجميع زملائي وتلاميذي وأساتذتي الذين ساعدوني بمختلف الطرق ... أعوام اعداد هذا الكتاب منذ كان مخطوطة فمذكرة فكتاب. انني مدين بكل اخلاصي .. جميعاً. وأود أن أشكر جوليا فروبل لعملها المتميز في طباعة المخطوطة. وقدم المراجعون .. ذكرهم ملاحظات مفيدة على الصور المختلفة السابقة لهذا العمل: جون انجرام - .امعة ولاية كاليفورنيا في ساكرامنتو، ليام مسليد - جامعةولاية ميتشجان، فرانك كليڤر - .امعة جنوب فلوريدا، و.ر. هينتزمان - جامعة سان دييجو، ميشيل شتلين - جامعة الشمال .لغربي، جويل ويستمان - جامعة كاليفورنيا - ايرڤين، والتر. ك. مالوري - جامعة ديلوار، .لف لاكنيس - جامعة سان فرانسيسكو، ايلي باسوف - جامعة تمبل، دافيد هالينباك - .امعة ديلوار، تيرنس جافني - جامعة الشمال الشرقي، ميشيل جريجوري - جامعة شمال داكوتا، استيبان بوفالد كلية واباش، وليام ارماكوست - جامعة كاليفورنيا - دومينيغوز هيلز، .ارتين بيليك - جامعة سان جوزيه، بربارا شابيل - جامعة ولاية كاليفورنيا التكنولوجية - .ومونا، دوجلاس هول، جامعة ولاية ميتشجان، ديتموتي سورنسون - جامعة ولاية كنت الذي قام بالمراجعة الدقيقة الأخيرة. وأخيراً أود أن أشكر محرري داري النشر أكاديمك برس . هاركورت براس جوفانوفيتش والعاملين بهما لمساعدتهم وتشجيعهم لي خلال فترة اخراج هذا العمل وتحويله من مذكرات الى كتاب.

المؤلف

تمهيد:
المقولات والبراهين الرياضية

أنماط المقولات الرياضية

Types of Mathematical Statements

ان موضوع هذا الكتاب ينظم ويجمع ما يسمى بالنظرية الرياضية «mathematical theory»، ويكمن الهدف في تقديم هذه النظرية وتوضيحها بوصفها مجموعة من المقولات المترابطة منطقياً فيما بينها، ويختلف هذا عن المنهج الأول المعروف للرياضيات، حيث يكون فيه الهدف هو تدريس مجموعة من طرق حل أنواع معينة من المسائل. وفي الحالة المثالية فإن أي منهج رياضي يجب أن يحتوي على بعض المواضيع النظرية، ولكن في مناهج حل المسائل يكون الطالب مسؤولاً عن أمور نظرية قليلة. وقد تكون الهندسة المستوية هي المنهج الوحيد قبل هذا الموضوع والتي تخصص بالكامل لتنمية النظرية الرياضية. وهنا كما في الهندسة نقابل أنماطاً مختلفة من المقولات التي تشكل عناصر هذه النظرية، وتصنيف كل مقولة بذكر شيء عن دورها في النظرية.

في البداية، هناك التعريفات (definitions)، وهي المقولات التي تصف الموضوعات أو الخواص أو المفاهيم التي علينا دراستها؛ وبعد ذلك، فإن هناك المسلمات (axioms) التي تنص على أشياء يفترض أن تكون صحيحة في هذه النظرية الخاصة. ولا يتطلب الأمر إثبات التعريفات أو المسلمات أو تبريرها بأية طريقة، على الرغم من أنه في بعض الحالات تعطى تمرينات لتوضيح الكيفية التي تكون بها النظرية المعروضة موازية أو امتداداً لموضوعات

عرفناها بخبرتنا السابقة. وهناك مصطلح آخر للمسلمة وهو بديهية (postulate)، يستخدم عادة في الهندسة الاقليدية ولكننا لا نستخدمه هنا(*).

وبالإضافة إلى التعريفات والمسلمات، فإن سلسلة من المقولات الشكلية التي يجب استنباطها بالاستعانة بمقولات أخرى إما بافتراض صحتها، أو على أنها برهنت قبل ذلك. وتسمى المقولات المبرهنة الأكثر أهمية بالنظرية (Theorems) أو بالمبرهنات، أما تلك التي تليها في الأهمية فتسمى بالنتائج (Collaries)، ويقصد بها المقولات التي يمكن استنتاجها - بوصفها نتائج اضافية - من المقولات الأخرى التي تم إثباتها. وبذلك ترد النتائج مباشرة بعد النظريات التي تستنتج منها.

وهناك فصل آخر من المقولات المستنتجة وهي ما يسمى بالنظريات المساعدة (lemma) وهي النتائج الأولية التي تستخدم في البرهنة على النظريات، وعادة، فإن مقولة النظرية المساعدة لا تكون ذات قيمة عامة في حد ذاتها، ولكنها تعطى عنواناً مستقلاً كطريقة ملائمة لتجزيء البرهان الطويل للنظرية.

وآخر مقولات هذه السلسلة هي ما يعرف بالمفترضات (Proposition). ويستخدم هذا المصطلح عندما تكون المقولة غير مهمة بدرجة كافية لتسمى نظرية، ويكون تسميتها بالنظرية المساعدة أو بالنتيجة غير مناسب. وفي الماضي وبخاصة في الهندسة الاقليدية الكلاسيكية كان يستخدم عنوان المفترض بنفس المعنى الذي يستخدم فيه الآن مصطلح النظرية.

بناء البرهان

The Structure of Proofs

ان معظم المقولات الرياضية التي تحتاج إلى برهان هي شرطية (Conditional): أي يتم النص على صحة شيء ما إذا كان شيء آخر معروفاً أو معطى بشكل صحيح، والجزء المعطى أو المفترض يسمى بالفرضية (hypothesis)، ويسمى الجزء المستنتج من الفرضية بالنتيجة (conclusion)، وأبسط صورة لهذه المقولة الشرطية هي: «إذا كان H فإن C» حيث ترمز H

(*) في اللغة العربية يستخدم عادة مصطلح المسلمة ترجمة للمصطلحين (axiom) و (postulate)وتعني المسلمة القضية أو المقولة في أي نظام رياضي يسلم بصحتها وتستنتج منها منطقياً حقائق ونظريات هذا النظام.

(ملاحظة المترجم)

الفرضية و C إلى النتيجة. وهناك عبارات أخرى مختلفة تعني نفس الشيء، مثل:

(أ) H تؤدي إلى C (ب) C فقط إذا كانت H

(ج) شرط ضروري لـ H (د) H كافي لتحقق C.

وهذه هي الصور الأكثر شيوعاً. مع وجود صور أخرى. وفي كثير من المقولات الشرطية تتكون الفرضية والنتيجة من جزئين أو أكثر، على سبيل المثال: إذا كانت «H_1، H_2، H_3 فإن C_1، C_2».

وإذا عكس دورا الفرضية والنتيجة في مقولة شرطية ما فإننا نحصل على مقولة تسمى معكوس المقولة الأصلية (converse). فالمقولتان «إذا كانت A فإن B» و «إذا كانت B فإن A» على سبيل المثال تكون كل منهما معكوسة للأخرى. وفي بعض الأحيان ينص على أن المقولة ومعكوستها صحيحتان كلاهما وعندئذ تجمع المقولتان في مقولة واحدة، مثل «A إذا وفقط إذا كانت B» ولإثبات هذه المقولة ثنائية الشرط يجب إثبات كلي التضمينين «A تضمن B و B تضمن A» (أو A تؤدي إلاى B و B تؤدي إلى A). وفي هذه الحالة نقول: إن A، B متكافئتان. وهناك عبارات أخرى للقولة ثنائية الشرط: إحداها: ـ والتي تقابلنا في معظم المراجع الرياضية ـ هي «A شرط ضروري وكافي لـ B». وهناك عبارة أخرى تكون مناسبة ـ خاصة عندما تكون كل من A، B معقدة بدرجة كافية ـ وهي «المقولتان التاليتان متكافئتان.

(أ) A؛

(ب) B».

وهذه الصورة هي ـ بالتأكيد ـ الأبسط في الاستعمال عندما يوجد أكثر من مقولتين متكافئتين.

والبراهين (agruments) المستخدمة في اثبات تضمين ما، مثل: «إذا كان H فإن C» يكون لها عدة صور أيضاً. وأبسط صورة للبرهان (ليس من الضروري أن تكون هي الأسهل في التنفيذ) هي: البرهان المباشر (direct). لاثبات أن H يضمن C، نفرض ببساطة أن صحة H معطاة ونستنتج منها صحة C. ويمكن اللجوء إلى البرهان غير المباشر بإحدى الطريقتين التاليتين:

البرهان بالنقيض (contrapositive) وذلك بفرض أن C خطأ ونستنتج أن H أيضاً يجب

أن تكون خاطئة. أما الطريقة الثانية فهي: البرهان بالتناقض contradiction أو reduction adabsurdum)(*) حيث يفترض أن المقولة التي نحن بصدد برهنتها خاطئة، والوصول من هذا الفرض بحجج منطقية صحيحة إلى نتيجة باطلة منطقياً إو منافية للمسلمات الأساسية 1 = 0 مثلاً وقد تكون منافية لمسلمة ما أو لمقولة ما سبق إثباتها.

وعادة ما يولع الطلبة الذين يمارسون عملية البرهان لأول مرة بصورة البرهان بالتناقض هذا، غير أنه يجب الحذر من أنه توجد مخاطر في ارتكاب بعض الخطوات الخاطئة منطقياً عند مناقشتنا انطلاقاً من فرضية يُفترض خطؤها في البداية. وبذلك، فإن الصورة المباشرة وصورة البرهان بالنقيض هما المفضلتان.

وعلى الرغم من أن التضمين (implication) «إذا كان H فإن C» يبدو مختصراً وبسيطاً، فإن كلاً من H، C قد يكون معقداً ومركباً للغاية. نوضح ذلك بتضمينٍ ذي فرضية من جزأين ونتيجة من جزء واحد: «إذا كان H_1، H_2 فإن C». ونقيض هذه المقولة (contrapositive) هي «إذا ليس C، فإنه ليس H_1، H_2 (كلاهما)». وبالتالي فإن البرهان بالنقيض يمكن تنفيذه بفرض أن C خاطئة و H_1 صحيحة ثم استنتاج أن H_2 خاطئة. كما يمكن أيضاً كبديل أن نفرض أن C خاطئة و H_2 صحيحة ونبيّن أن H_1 يجب أن تكون خاطئة. وهذه المناقشة تطرق - بصعوبة - الباب على سطح المنطق الصوري، إلا أنه يتوجب على الطالب التعرُّف على هذه الصور كما تظهر في الايضاحات والتطورات الواردة في النظرية الرياضية.

وننهي هذه المناقشة التمهيدية ببعض الملاحظات حول العبارات اللغوية واستخداماتها في الكتابة الرياضية. الصورة الصادقة للتضمين «إذا كان H، فإن C» يمكن أن تصبح مملة إذا استخدمت بدون تغيير، ولذا تستخدم طرق أخرى للتعبير عن نفس الشيء. على سبيل المثال، تصاغ الخاصية المعروفة للأعداد الحقيقية، وتعاد صياغتها كما يلي:

(أ) إذا كان x عدداً حقيقياً، فإن $x^2 \geqslant 0$.

(ب) لكل عدد حقيقي x يكون $x^2 \geqslant 0$.

(ج) لكل عدد x من الأعداد الحقيقية يكون $x^2 \geqslant 0$.

(د) لأي عدد حقيقي x يكون $x^2 \geqslant 0$.

(*) مصطلح لاتيني يعني التوصل إلى أمر مناف للعقل وباطل منطقياً. (ملاحظة المترجم)

وتعني هذه المقولات الشيء نفسه ولكن التعبيرات المختلفة للفرضيات تسمح لنا بالتأكيد من الفروق الجوهرية في النص المتضمن.

لكن لا تقلق نفسك الآن بمثل هذا الموضوع المتعلق بالأسلوب والعرض. يكفي الآن أن تعلم أن هذه المقولات متكافئة. وبالمثل، فالعبارة «هناك يوجد» تعني بالضبط الشيء نفسه مثل «يوجد» ولكن الأولى تستخدم كثيراً بهدف التأكيد.

الفصل الأول

1

ترتيب الأعداد الحقيقية

Ordering of the real numbers

1.1 مسلمة الترتيب (The Order Axiom)

نرمز إلى فئة الأعداد الحقيقية بالحرف $\mathbb{R}$. نفترض تحقُّق الخواص الحسابية والجبرية لمجال الأعداد الحقيقية ونبدأ ـ بشكل اختياري بحت ـ بتعريف الأعداد الموجبة P بوصفها فئة جزئية (Subset) خاصة من $\mathbb{R}$.

مسلمة الترتيب: إنّ الفئة الجزئية P من $\mathbb{R}$ المُسماة بالأعداد الموجبة تحقّق الخواص التالية:

- إذا كان x و y في P فإن x + y و xy في P.
- لكل x في $\mathbb{R}$ تكون واحدة من المقولات التالية صحيحة تماماً:

(i) $x = 0$

(ii) x في P

(iii) $-x$ في P.

في حالة كون $-x$ في P تسمى x عدداً سالباً. لاحظ أننا لا نستخدم رمزاً لفئة الأعداد السالبة. والاختيار الطبيعي هو الرمز N، ولكن هذا الرمز يستخدم عادة في الإشارة الرمزية إلى الأعداد الطبيعية {1, 2, 3, ...}، ونحن نستخدم N أيضاً في الرمز، إلى الأعداد الطبيعية.

ويُفترض تحقُّق قواعد الحساب للأعداد الموجبة والسالبة، على سبيل المثال، يكون حاصل ضرب عددين حقيقيين عدداً سالباً فقط إذا كان أحد العددين موجباً والآخر سالباً.

تعريف 1.1:

تُعرَّف علاقة المتباينة «أصغر من» كما يلي: $x < y$ (x أصغر من y) تعني أن y, x في R و $(y - x)$ في P.

ومن الشائع والمناسب استخدام صور مختلفة للعلاقة السابقة. فالمقولة $y > x$ (y أكبر من x) تعني أن $x < y$. والمقولة $x \leqslant y$ (x أصغر من أو تساوي y) تعني $y \not< x$ أي نفي $y < x$. وبالمثل فإن $y \geqslant x$ (y أكبر من أو تساوي x) تعني $y \not< x$. وأخيراً، فإن المتباينة $x < y < z$ (x أصغر من y الذي يكون أصغر من z) تعني أن $x < y$، $y < z$.

والآن نورد بعض البراهين البسيطة باستخدام مسلمة الترتيب وعلاقة المتباينة.

مفترض 1.1 (proposition):

إذا كان $x < y$ وكان z في $\mathbb{R}$ فإن $x + z < y + z$.

البرهان:

الافتراض $x < y$ يعني أن $y - x$ في P و $y - x$ هو نفسه، مثل $(y + z) - (x + z)$ في P، وهذا يعني أن: $x + z < y + z$.

مفترض 1.2:

إذا كان $x < y$، وكان z في P فإن $x z < y z$.

البرهان:

نفترض $x < y$، ومن ثم $y - x$ في P. وكذلك نفرض أن z في P، ولذا فإن انغلاق P تحت عملية الضرب - وهي الخاصية (أ) من مسلمة الترتيب - تؤكد لنا أن $z(y - x)$ في P، ووفقاً لخاصية التوزيع فإن ذلك يعني أن $yz - xz$ في P، ومن ثم تكون $xz < yz$.

مفترض 1.3:

إذا كان $x < y$ وكان $-z$ في P فإن $xz > yz$.

البرهان:

أنظر التمرين 1.1.1 (تمرين 1 في نهاية بند 1.1).

مفترض 1.4 :

إذا كان $x < y < z$ فإن $x < z$.

البرهان :

انظر التمرين 1.1.2.

مفترض 1.5 :

إذا كان $0 < x < y$ فإن $x^2 < y^2$.

البرهان :

حيث إن $x < y$ يمكننا الاستعانة بالافتراض 1.2 لضرب الطرفين مرة في x ومرة في y وكل منهما موجب من الفرض. وبالافتراض 1.4). وتؤدي عمليتا الضرب إلى $xy < y^2$ و $x^2 < xy$ على الترتيب. وبذلك ووفقاً للافتراض 1.4 نستنتج أن $x^2 < y^2$. وفي الافتراضين 1.7 و 1.6 نعمّم الخاصية (أ) من مسلمة الترتيب لنبين أن P تحتوي مجموع وحاصل ضرب أي فئة منتهية(*) من عناصرها. وهذا النوع من التعميمات شائع في الرياضيات، ونستعين في البرهان بمبدأ الاستقراء الرياضي (انظر الملحق A).

مفترض 1.6 :

إذا كان $\{x_0 ، x_1 ، . . . . ، x_n\} \subseteq P$ فإن $(x_0 + x_1 + ... + x_n)$ في P.

البرهان :

نلاحظ أولاً أنه إذا كان $n = 1$ فإن المنطوق صحيح؛ لأنه جزء من الخاصية (أ) من مسلمة الترتيب. وبعد ذلك نفترض أن المنطوق صحيح عندما $n = k$ لأي عدد k اختياري في N. وبذلك إذا كان $x_0 ، x_1 ، . . . . ، x_k$ أي $k + 1$ عناصر من P، فإن :

(*) إذا كانت الفئة منتهية (finite) فإنها محدودة (bounded). وإذ كانت لامنتهية فقد تكون محدودة مثل $\{1، \frac{1}{2}، \frac{1}{3}، ...\}$ وهي فئة جزئية من الفترة المغلقة [0، 1]، أو لامحدودة مثل فئة الأعداد الزوجية الموجبة أو الفردية الموجبة. (ملاحظة المترجم).

$$\left(x_0 + x_1 + \ldots + x_k\right) \in P \qquad (1)$$

نـأخـذ بـعـين الاعـتـبـار فئـة اختـيـاريـة مـن $k + 2$ عـنـصـراً في P ولـتـكـن $\{x_0 ، x_1 ، \ldots ، x_{k+1}\} \in P$ ، ونكتب مجموعها على الصورة:

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{k+1} = \left(x_0 + \ldots + x_k\right) + x_{k+1}$$

والـطرف الأيمن هـو مجمـوع عنصرين من P: $(x_0 + x_1 + \ldots + x_k)$ في P من (1)، و x_{k+1} هو عنصر من عناصر الفئة ذات $k + 2$ الأعداد الموجبة. وبذلك فمن الخاصية (a) يكون مجموع هـذين العددين الموجبين في P. ومن هنا ووفقاً لمبـدأ الاستقراء الـرياضي يكون المنطوق صحيحاً لأية فئة متهية (finite) من الأعداد الموجبة.

مفترض 1.7:

إذا كـانـت $\{x_0 ، x_1 ، \ldots ، x_n\} \subseteq P$ فـإن حـاصـل ضرب كـل الـعـنـاصر $x_0\, x_1 \ldots\ldots x_n$ في P.

البرهان:

هذا البرهان مماثل لبرهان مفترض 1.6، ويُترك كتمرين (انظر تمرين 1.1.3).

مفترض 1.8:

إذا كان $0 < x < y$، و n عدداً صحيحاً موجباً فإن $x^n < y^n$.

البرهان:

انظر تمرين 1.1.4.

تمارين 1.1

1 ـ أثبت المفترض 1.3.

2 ـ أثبت المفترض 1.4.

3 ـ اثبت المفترض 1.7.

. أثبت المفترض 1.8.

. برهن أنه إذا كان $x < y$ ، $a < b$ فإن $x + a < y + b$.

. أثبت أنه إذا كان x, y في P، $x^2 < y^2$ ، فإن $x < y$.

أثبت مبدأ حسن الترتيب (الترتيب الجيد) (Well ordering principle) : إذا كانت S فئة جزئية غير خالية من N فإن S تحتوي على عنصر أصغر (ارشاد: افرض أن S ليس لها عنصر أصغر وأن $T = N - S$ ، وبعد ذلك استعن بمبدأ الاستقراء الرياضي لتبين أن $T = N$ ، وبذلك فإذا لم يكن للفئة S عنصر أصغر فإنها خالية).

1.2 أصغر الحدود العليا

الآن ندرس مفهوم الفئات الجزئية المحدودة للفئة $\mathbb{R}$. تسمى فئة الأعداد s محدودة (bounded) إذا كانت مُحتواه في الفترة المغلقة [a, b]، أي يجب أن يحقق أي عنصر s من S المتباينة $a \leqslant s \leqslant b$. وفي هذه الحالة يسمى العدد a بالحد الأسفل (lower bound) للفئة S، ويسمى العدد b بالحد الأعلى (upper bound) للفئة S.

على سبيل المثال، فإن الفئة $\left\{-1, 2, \frac{5}{2}, 7\right\}$ محتواة في الفترة [7، 1−] وبالتالي فهي محدودة. وفئة الكسور «الفعلية» أي $\left\{\frac{p}{q} ; 0 < p < q ; p, q \in N\right\}$ محتواة في الفترة [0, 1]، وبالتالي فهي محدودة. وبالفعل فالفترة [0,1] هي نفسها فئة محدودة كأية فترة مغلقة. ومن ناحية أخرى فإن الفئة R ليست محدودة؛ لأنه مهما كانت الفترة [a, b] التي نختارها فإنها لا تحتوي $a - 1$ و $b + 1$ ، وبالتالي فهي لا يمكن أن تحتوي على كل عناصر $\mathbb{R}$.

وإذا كان لفئة الأعداد S حد أعلى (وربما ليس لها حد أسفل) فإن S تسمى محدودة من أعلى. وبالمثل تكون S محدودة من أسفل إذا كان لها حد أسفل (وربما ليس لها حد أعلى). وكمثال بسيط على ذلك فإن فئة الأعداد الموجبة P محدودة من أسفل بالصفر ولكنها غير محدودة من أعلى.

وإذا كانت الفئة S محتواة في الفترة $[a, b]$، فإن b, a لا يشكلان الحدّين الوحيدين الأسفل والأعلى على الترتيب للفئة S.

فإذا كان c أي عدد اختياري أصغر من a فإنه لأي عنصر s من S يكون $c < a \leqslant s$. وبالتالي وفقاً للمفترض 1.4 يكون $c < s$ وبالتالي فإن c حد أسفل للفئة S. وبالمثل فالحد الأعلى للفئة S ليس وحيداً. ويكون الوضع أحياناً مختلفاً تماماً إذا حاولنا ايجاد حد أعلى يكون أصغر من b، أو حد أسفل يكون أكبر من a. وفي الفقرة السابقة لاحظنا أن الفئة $\left\{7، \frac{5}{2}، 2، -1\right\}$ محتواة في الفترة $[-1، 7]$ غير أنه من الواضح أنه لا يمكن وجود حد أعلى أصغر من 7 ولا يوجد حد أسفل أصغر من -1. ويوحي ذلك الينا بمفهوم أصغر حد أعلى.

تعريف 1.2:

يسمى العدد β بأصغر حد أعلى (Least upper bound) للفئة S إذا كان:

(i) β حداً أعلى للفئة S،

(ii) اذا كان b أي حد أعلى للفئة S، فإن $\beta \leqslant b$.

يختصر أصغر حد أعلى للفئة S بالرمز Lub S.

ويعرف أكبر حد أدنى (greatest lower bound) للفئة S بالمثل ويرمز له بالرمز glb S.

ومن المهم أن ندرك أننا لا ننتظر أن يكون lub S عنصراً في S. على سبيل المثال الفترة (a, b) تتكون من كل الأعداد التي تحقق المتباينة $a < s < b$. ومن السهل أن نبين أنه لا يوجد عدد أصغر من b يمكن أن يكون حداً أعلى للفترة (a, b) وبذلك فإن $b = \text{lub } S$، وبالمثل $a = \text{glb } S$، على الرغم من أن أياً من a أو b ليس منتمياً إلى الفئة (a, b). وتؤدي بنا هذه الملاحظات إلى المسلمة الأخيرة ـ وربما الأهم ـ للأعداد الحقيقية.

مسلمة أصغر حد أعلى (L U B)

إذا كانت S فئة غير خالية من الأعداد ومحدودة من أعلى، فسيكون لـ S أصغر حد أعلى.

وبالأخذ في الاعتبار مسلمة أصغر حد أعلى، يمكننا أن نتوقع مقولة نظرية تضمن وجود أكبر حد أدنى (أو أسفل).

... من الضروري أن نصيغ ذلك كمسلمة أخرى؛ إذ يمكننا استنباطها من الخواص ... سناها بالفعل فيما سبق(*).

... 1.1: خاصية أكبر حد أسفل (GLB):

... كانت S فئة غير خالية من الأعداد، محدودة من أسفل فسيكون لـ S أكبر حد أسفل.

البرهان

... أن S^* ترمز إلى الفئة $\{-s ; s \in S\}$. وفي البداية نؤكد أنه إذا كان a أي حد ... للفئة S فإن $-a$ يكون حداً أعلى للفئة S^*؛ لأن $a \leqslant s$ يتضمن أن يكون ... وفقاً للمفترض 1.3. وبذلك فإن S^* محدودة من أعلى، وبالتالي وفقاً لمسلمة ... حد أعلى يوجد $\text{lub}\ S^*$ وليكن هو $-\alpha$، ويعني هذا أنه لأي $-s$ من S^* وأي حد أعلى ... للفئة S يكون $-s \leqslant -\alpha \leqslant -a$. ووفقاً للمفترض 1.3 نستنتج أن $a \leqslant \alpha \leqslant s$ ... هنا فإن α هو حد أسفل للفئة S يكون أكبر من أي حد أسفل لهذه الفئة S أي أن ... α.

... أهمية مسلمة أصغر حد أعلى في تلك الخاصية التي تجعل مفاهيم النهايات ممكنة، ... المفاهيم التي يؤسس عليها حساب التفاضل والتكامل والتي تتضمن عدم وجود «ثقب» ... الأعداد الحقيقية.

... إذا كانت هناك نقطة ما على هذا الخط لا يناظرها أي عدد حقيقي، فإن فئة كل الأعداد ... للنقط الواقعة على يسار الثقب لن يكون لها أصغر حد أعلى، على الرغم من أن هذه ... يمكن أن تكون محدودة بأي عدد نقطته المناظرة واقعة على يمين الثقب. واهتمامنا ... تحليلي أكثر منه هندسي، لذا فإننا نستعرض قوة مسلمة أصغر حد أعلى باثبات نظريتين ... وعميقتين في آن واحد؛ وتتعلق الأولى بفئة الأعداد الطبيعية N، من الواضح أنه لا ... لعنصر من N أن يكون حداً أعلى لها؛ لأنه إذا كان n في N فإن $n+1$ أيضاً في N. ... ليس من الواضح ـ مع ذلك ـ عدم وجود عدد غير صحيح يمكن أن يكون حداً أعلى ... N، ولإثبات ذلك نستعين بمسلمة أصغر حد أعلى.

* ... إنما يعكس الاتجاه المركزي للرياضيات. فليس الهدف تراكم مجموعة من المقولات أو المسلمات المفترض ... صحتها، وإنما الهدف توضيح أن صحة بعض هذه المقولات تنتج من صحة بعضها الآخر. وبالتالي فالنظرية ... الأفضل هي تلك التي تحتوي على مسلمات أقل وتثب فيها نظريات (مبرهنات) أكثر.

نظرية 1.1:

فئة الأعداد الطبيعية N ليست محدودة من أعلى.

البرهان:

نفرض أن للفئة N حد أعلى. عندئذ ووفقاً لمسلمة أصغر حد أعلى يجب أن يكون للفئة N أصغر حد أعلى وليكن β، وبذلك فلكل n من N يكون $n \leqslant \beta$، ولكن حيث إن $n+1$ أيضاً ينتمي إلى N ينتج أن $n+1 \leqslant \beta$ بالاستعانة بالمفترض 1.1 لكتابة المتباينة الأخيرة، نحصل على $n \leqslant \beta - 1$ لكل n من N. ومن ثم فإن $\beta - 1$ هو حد أعلى آخر للفئة N، وهو أصغر من أصغر حد أعلى β. ومن هذا التناقض نستنتج أن افتراضنا الأصلي كان غير صحيح. وبالتالي لا يمكن أن يكون للفئة N حد أعلى.

1.3 كثافة الأعداد القياسية

تتعلق النظرية الأخيرة في هذا الباب بخاصية الأعداد القياسية (المنطقة) (rational) التي تسمى بالكثافة. وسنرمز من الآن فصاعداً للأعداد القياسية بالرمز Q أي أن $Q = \left\{ \frac{n}{m} ، n,m \text{ integres} ، m \neq 0 \right\}$. وفئة الأعداد S تسمى فئة كثيفة (dense) في R إذا وجد لأي عددين حقيقيين $x < y$ عنصر من S يحقق المتباينة $x < s < y$. وإذا تصورنا ذلك على **المحور العددي** فإن كثافة S تعني عدم وجود أية فترة لا تحتوي على عنصر من S.

نظرية 1.2:

فئة الأعداد القياسية كثيفة في R.

البرهان:

نفرض أن x, y أي عددين حقيقيين، وليكن $x < y$. عندئذ فإن $0 < y - x$، ووفقاً للنظرية 1.1 لا يكون $\frac{1}{(y-x)}$ حداً أعلى للفئة N. نختار عدداً صحيحاً موجباً m بحيث يكون $m > \frac{1}{(y-x)}$ ومن ثم $\frac{1}{m} < y - x$. والآن نفرض أن n هو ذلك

... الصحيح الموجب بحيث يكون $mx < n$، ومن ثم:

$$n - 1 \leqslant mx < n$$

$$\frac{n}{m} - \frac{1}{m} \leqslant x < \frac{n}{m}$$

... الأخذ في الاعتبار أن $\frac{1}{m} < y - x$ نكتب (1) في الصورة:

$$\frac{n}{m} \leqslant x + \frac{1}{m} < x + (y - x) = y$$

... (1) و (2) نحصل على $x < \frac{n}{m} < y$.

تمارين 1.3

... لكل فئة من الفئات التالية أصغر حد أعلى لها أو بيّن أنها غير محدودة من أعلى:

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in N\right\}$$

$$B = \left(2 - \frac{1}{2} ، 2 + \frac{1}{2}\right) \cup \left(3 - \frac{1}{3} ، 3 + \frac{1}{3}\right) \cup \ldots..$$

$$\cup \left(n - \frac{1}{n} ، n + \frac{1}{n}\right) \cup \ldots.$$

$$C = (0, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{4}, \frac{15}{8}\right) \cup \ldots..$$

$$D = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4} - \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, -\frac{7}{8} \ldots..\right\}$$

5 - $E = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 2 ، -2, \ldots\right\}$

6) $F = \left\{ n - \frac{1}{n} : n \in N \right\}$

7 - بفرض أن A, B فئتان جزئيتان غير خاليتين للفئة R بحيث إنه إذا كان $a \in A$، $b \in B$ ، فإن $a < b$.

أثبت أن $\text{lub } A < \text{glb } B$.

8 - بفرض أن $\sqrt{2}$ عدد غير قياسي (irrational)، أثبت أن فئة الأعداد غير القياسية كثيفة في R.

تتعلق التمارين 9-13 بمفهوم القيمة المطلقة، التي تُعرَّف بالاستعانة برموز هذا الباب كما يلي :

$$|a| = \begin{cases} a & ، \quad a \in P \\ -a & ، \quad a \in R - P \end{cases}$$

9 - أثبت أنه لكل a من $\mathbb{R}$ يكون $|a| \geqslant 0$.

10 - أثبت أنه لكل $a ، b$ من $\mathbb{R}$ يكون $|a\, b| = |a|\, |b|$

11 - أثبت أنه لكل $a ، b$ من R يكون $|a + b \leqslant |a| + |b|$

12 - أثبت أنه لكل $a ، b$ من R يكون $\big|\, |a| - |b| \,\big| \leqslant |a - b|$

13 - استعن بالاستقراء الرياضي لإثبات أنه لأي

$a_1 ، a_2 ، \ldots ، a_n$ من R يكون

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

14 - أثبت نظرية قطع ديدكند (Dedekind Cut theorem) :

بفرض أن A, B فئتان غير خاليتين بحيث يكون :

$A \cup b = B$ وإذا كان $a \in A$ ، $b \in B$ فإن $a < b$.

عندئذ توجد «نقطة قطع» c بحيث إنه إذا كان

$x < c < y$ فإن $x \in A$ ، $y \in B$.

الفصل الثاني

2

نهايات المتتاليات

Sequence Limits

2.1 المتتاليات التقاربية

يمكن تعريف الدالة على أنها تجمّع (أو فئة) من الأزواج المرتبة (x, y) بحيث لا يشترك أي زوجين مرتبين في العنصر الأول. وتسمى الفئة التي تتكون من العناصر التي تحتل المكان الأول في الأزواج بنطاق الدالة، وتسمى الفئة التي تحتل المكان الثاني في الأزواج المرتبة بمدى الدالة.

في هذا الفصل سندرس الدوال التي تمتاز بنطاق معين.

المتتالية هي: دالة نطاقها فئة جزئية غير منتهية من الفئة $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ والمتتالية العددية هي: متتالية يكون مداها فئة جزئية من $\mathbb{R}$، وسنشير لكلتا الحالتين باسم: متتاليات (متتابعات).

من الملائم في بعض الأحيان أن نفكر في المتتالية على أساس أن نطاقها الفئة $\{0, 1, 2, \ldots\}$، هذه النظرة لا تسبب اختلافاً جوهرياً في النظرية، ويكون واضحاً من سياق الكلام بأن النطاق هو $\mathbb{N}$ أو $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

إذا كانت S متتالية و m في $\mathbb{N}$، فمن المعتاد أن نكتب s_n للدلالة على صورة n تحت تأثير الدالة S بدلاً من التعبير الدالي $S(n)$، في هذه الحالة، يسمى s_n بالحد النوني (nth term) للمتتالية S.

نقول بأن المتتالية S محدودة (bounded) بشرط أن يكون مدى S فئة محدودة، هذا يماثل

قولنا أن هناك عدداً B بحيث يكون $|s_n| \leqslant B$ لكل n في $\mathbb{N}$. المتتالية الثابتة هي المتتالية التي يتكون مداها من عدد واحد فقط، أي أن $S_n = C$ لكل n في $\mathbb{N}$. المتتالية تكون ثابتة الذيل إذا كان هناك عدد C وعدد صحيح $\mathbb{N}$ حيث $n > \mathbb{N}$ يؤدي إلى $S_n = C$.

تعريف 2.1:

يقال: بأن المتتالية s تتقارب (converges) إلى العدد L بشرط أنه إذا كان لأي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد N حيث:

$$n > N \quad \text{يؤدي إلى} \quad |s_n - L| < \varepsilon .$$

في هذه الحالة تسمى s متتالية تقاربية ونكتب $\lim_n s_n = L$.

وفي بعض الأحيان يكون من الملائم أن توصف المتتالية بكتابة بعض حدودها الأولى كي نستطيع استنتاج بقية الحدود رغم أن هذا التطبيق قد يؤدي إلى نوع من الفوضى، ولكنه يستعمل كثيراً. وبذلك يكون من المستحسن على القارىء التدرُّب على صياغة المتتالية s_n كلما واجهها موصوفة على الشكل التالي:

$$\{s_1 ، s_2 ، s_3 \ldots\ldots\}.$$

مثال 2.1:

إذا كانت $s = \{1, 1, 2, 2, 2, \ldots\}$، فإن:

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n \leqslant 2 \\ 2 & \text{if} \quad n > 2 \end{cases}$$

هذه المتتالية من نوع المتتالية ثابتة الذيل ونهايتها هي:

$$\lim_n s_n = 2$$

مثال 2.2:

إذا كانت $s = \{a, \ldots\ldots, a, L, L, L, \ldots.\}$ فإن:

$$s_n = \begin{cases} 'a & \text{if} \quad n \leqslant N \\ L & \text{if} \quad n > N \end{cases}$$

•• لمتالية تعتبر حالة عامة للمتتالية ثابتة الذيل وتتقارب نحو L.

مثال 2.3:

لمتالية التوافقية (harmonic)

$$\left\{1 ، \frac{1}{2} ، \frac{1}{3} ، \frac{1}{4} ، \ldots\right\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

…ب إلى العدد 0 وهو ما سنبرهنه هنا بالتفصيل. لنفرض أن $\varepsilon > 0$ ، باستعمال النظرية 1.1 فإن $\frac{1}{\varepsilon}$ لا يكون حد أعلى للفئة $\mathbb{N}$. لهذا السبب يوجد عدد صحيح $N > \frac{1}{\varepsilon}$.
…ذا كانت $n > N$ فإنه باستعمال المفترض 1.4 نستنتج أن $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وباستعمال …ص 1.2 يكون لدينا $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ، أي أن:

$$\left|\left(\frac{1}{n}\right) - 0\right| < \varepsilon \quad \text{وهذا يعني أن} \quad \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

مثال 2.4:

إذا كانت $s = \left\{1 ، 0 ، \frac{1}{2} ، 0 ، \frac{1}{3} ، 0 ، \ldots\right\}$ فإن:

$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{if} \quad n = 2k - 1 \\ 0 & \text{if} \quad n = 2k \end{cases}$$

…خذ k في $\mathbb{N}$. حيث يكون $\lim_n s_n = 0$، والذي يمكن توضيحه باختيار $N > \frac{2}{\varepsilon}$ ومتابعة المثال 2.3.

مثال 2.5:

المتتالية الهندسية $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $0 < r < 1$ (نعتبر هنا أن r تنتمي للفقرة (0 ، 1) للملاءمة) ولـ r هذا سنبرهن أن $\lim_n r^n = 0$. نلاحظ أولاً أن $\frac{1}{r} > 1$

(باستعمال المفترض 1.4 والمفترض 1.2) وهكذا نستطيع أن نكتب $\frac{1}{r} = 1 + h$ ، لأي عدد موجب h:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \dots + h^n > nh$$

اذن $r^n < \frac{1}{(nh)}$ وإذا أعطيت $\varepsilon > 0$ فنختار $N > \frac{1}{(h\varepsilon)}$ ثم نتابع كما في المثال 2.3.

الأمثلة من 2.6 إلى 2.8 أمثلة لمتتاليات تباعدية (Divergent).

مثال 2.6:

$$\{1, 2, 3, \dots\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$$

مثال 2.7:

إذا كانت $s = \{1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots\}$ فإن:

$$s_n = \begin{cases} k & \text{if} \quad n = 2k-1 \\ 0 & \text{if} \quad n = 2k \end{cases}$$

مثال 2.8:

إذا كانت $s = \{1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$ فإن

$$S_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$$

لكي نوضح أن أيّاً من هذه المتتاليات لا تحقق تعريف التقارب، نبرهن أنه لكي تكون أي قيمة L نهاية فإن كل حدود المتتالية ما عدا عدد نهائي من هذه الحدود لا بد أن تكون بين $L - \frac{1}{3}$ ، $L + \frac{1}{3}$ (طبقاً للتعريف، وذلك باستعمال $\varepsilon = \frac{1}{3}$). ولكن ذلك لا يحصل لمتتالية أعداد صحيحة إلا إذا كانت متتالية ثابتة الذيل، أمّا المتتاليات في الأمثلة 2.6، 2.7، 2.8 فهي ليست ثابتة الذيل.

من غير الملائم أن نعتمد على التعريف لتحديد التقارب في كل مثال، في صالحنا إذن أن

نبرهن على صحة النظريات الأساسية حول التقارب والتباعد للمتتاليات وكيفية ايجاد نهاية المتتالية حتى يتم استخدامها في حل الأمثلة. لتوضيح ذلك فإن النظرية التالية تستخدم مباشرة لاستنتاج أن المتتاليات الواردة في الأمثلة 2.6، 2.7 متباعدة.

نظرية 2.1:

إذا كانت s متتالية تقاربية، فإن s محدودة.

البرهان:

لنفترض أن $\lim s_n = L$ ، ثم نختار N حيث إن $n > N$ يتضمن $|s_n - L| < 1$ ، وهذا يكافىء $L - 1 < s_n < L + 1$. ومن ذلك نجد أن $|s_n| < |L| + 1$ عندما تكون $n > N$، مما يعني أن الرقم $|L| + 1$ حد أعلى للفئة $\{|s_N + 1| ، |s_N + 2| ، ...\}$. لنفرض أن B هو الرقم المعطى كالآتي:

$$B = \max \{|s_1| ، |s_2| ، ..... ، |s_N| ، |L| + 1\}$$

من ذلك نرى أن B كبيرة على الأقل مثل كل حد من الحدود N الأولى لـ (s)، وفي الوقت نفسه تشكل الحد الأعلى للفئة $\{s_{N+1} ، s_{N+2} ، ....\}$. لهذا السبب فإن $|s_n| \leqslant B$ لكل n.

بالرغم من أهمية النظرية التالية في نظرية التقارب والتباعد، فإن معظم الناس ما عدا علماء الرياضيات يتخذها كمسلمة، هذه النظرية تضمن لنا أنه ليس للمتتالية التقاربية أكثر من نهاية واحدة.

نظرية 2.2:

إذا كانت s متتالية تقاربية، تكون نهايتها وحيدة.

البرهان:

لنفرض أن $\lim_n s_n = L$ وأن M لا تساوي L. لا بد أن نبرهن على أن s لا تتقارب إلى M. لنفرض أن $\varepsilon = \frac{|L - M|}{2}$ ، أي أن ε تساوي منتصف المسافة بين

M, L. بما أن $\lim_n s_n = L$ يوجد N حيث $n > N$ يؤدي إلى أن $L - \varepsilon < s_n < L + \varepsilon$. وإذا كانت s في الفترة المفتوحة $(L - \varepsilon ، L + \varepsilon)$ فإنها لا تكون في الفترة المفتوحة $(M - \varepsilon ، M + \varepsilon)$ إذْ أنَّ لا تقاطع بين هاتين الفترتين. إذاً $|s_n - M| \nless \varepsilon$ كلما كانت $n > N$. لهذا السبب فإن s لا تتقارب إلى M.

في بعض الأحيان نريد أن نتحقق من تقارب متتالية معقدة التركيب وذلك بمقارنتها تباينياً مع متتالية أخرى معروفة. في هذه الحالة نستنتج تقارب المتتالية المعقدة من المتتالية المعروفة.

على سبيل المثال إذا كانت $s_n = 2^{-n} \left[\frac{(n + 1)}{(n + 3)} \right]^n$ فإننا نعرف أن $\frac{(n + 1)}{(n + 3)}$ على الأكثر 1. إذن $s_n \leqslant 2^{-n}$ وبما أننا نعلم أن $\lim_n 2^{-n} = 0$ فمن المفروض أن نستنتج أن $\lim_n s_n = 0$ أيضاً. هذه الحالة ـ وهي حشر (squeezing) الحد s_n بين حد متتالية متقاربة ونهايتها ـ تشكّل جوهر النتيجة التالية.

مفترض 2.1:

إذا كانت t, s متتاليتين بحيث $\lim_n t_n = L$ ولكل n يكون $L < s_n < t_n$، فإن $\lim_n s_n = L$.

البرهان:

تؤدي المتباينات $L < s_n < t_n$ إلى أن $|s_n - L| \leqslant |t_n - L|$. نتحقق من ذلك ونكمل البرهان في التمرين 2.1.12.

تفيدنا النتيجة التالية في تقريب نهاية المتتالية التقاربية عندما لا يكون لدينا معلومات كافية لإيجاد النهاية بالضبط.

مفترض 2.2:

إذا كان $\lim_n s_n = L$ ولكل n تكون s_n في الفترة $[a ، b]$ فإن L تكون في الفترة $[a ، b]$ أيضاً.

ـهان:

ـن أولاً أن $L \leqslant b$. لنفرض أن ذلك غير صحيح أي أن $L > b$ ولنفرض أن $\varepsilon = L - b$ إذن المتباينة $|s_n - L| < \varepsilon$ تؤدي إلى:

$$s_n > L - \varepsilon = L - (L - b) = b.$$

ـقض أن s_n في الفترة $[a ، b]$. بقية البرهان مطلوبة في التمرين 2.1-13.

ـمـريـن 2.1

ـل متتاليـة في التمارين من 1 إلى 11 عـيّن ما إذا كـانت المتتاليـة تقاربيـة أو غير تقـاربية ـ ـهـ استنتاجك.

$$s_n = \frac{2n + 1}{n}$$

$$s_n = (-1)^n$$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$s_n = \left[\frac{n + 1}{n}\right]$$

ـما $[x]$ تعني أكبر عدد صحيح لا يتعدى x.

$$s_n = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sin n\right]$$

ـما $[x]$ تعني كما في التمرين 4.

$$s_n = \frac{\cos n}{n}$$

$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{if } n \text{ is odd (فردي)} \\ 0 & \text{if } n \text{ is even (زوجي)} \end{cases}$$

$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{if} \quad n \quad \text{is} \quad \text{odd (فردي)} \\ 1 & \text{if} \quad n \quad \text{is} \quad \text{even (زوجي)} \end{cases}$$ - 8

$$s_n \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{if} \quad n \quad \text{is} \quad \text{odd (فردي)} \\ \frac{1}{2n} & \text{if} \quad n \quad \text{is} \quad \text{even (زوجي)} \end{cases}$$ - 9

$$s_n = \left\{\frac{1}{2} ، \frac{1}{3} ، \frac{1}{2^2} ، \frac{1}{3^2} ، \frac{1}{2^3} ، \frac{1}{3^3} ، .....\right\}$$ - 10

$$s_n = \left\{0 ، 1 ، 0 ، \frac{1}{2} ، 1 ، 0 ، \frac{1}{3} ، \frac{2}{3} ، 1 ، 0 ، \frac{1}{4} ، .....\right\}$$ - 11

(12) برهن المفترض 2.1.

(13) أكمل برهان المفترض 2.2.

(14) أعط مثالاً يُوضح أن تقوية الفرض في المفترض 2.2 بأنّ s_n في (a, b) لا تضمن أن L يكون في (a, b).

(14) برهن أن لكل عدد حقيقي L توجد متتالية q من الأعداد القياسية، حيث $\lim_n q_n = L$ (x). (ارشاد: انظر النظرية 1.2).

(16) برهن أن لكل عدد حقيقي L توجد متتالية s من الأعداد غير القياسية بحيث $\lim_n s_n = L$. (ارشاد: انظر التمرين (1.3.8).

2.2 التركيبات الجبرية للمتتاليات Algebraic Combination of sequences

موضوعنا القادم هو التحقق من الانغلاق الجبري لمجموعة المتتاليات التقاربية. على سبيل المثال، إذا كانت s ، t متتاليتين، نستطيع أن نكوّن جمعهما وهو s + t ، والذي يكوّن متتالية حدّها النوني (n-th term) هو $s_n + t_n$. وبالمثل الفرق s − t ، الضرب st،

. مسمة $\frac{s}{t}$ تُعرّف بتركيبات الحدود النونية المناظرة لكل من s و t. من المفيـد أن نعلم أنه . . ت s تقاربية وكذلك t تقاربية فإن التركيبات الجبرية لهما أيضاً تكوّن متتاليات تقاربية.
. هو لب النظريتين التاليتين.

. لكن قبل صياغة هذه النتائج نبرهن ثلاث نظريات مساعدة لتسهل عملية برهان . . ات القادمة.

. نسمى المتتالية التي تتقارب إلى الصفر بالمتتالية التافهة (trivial). وتستخدم . . . عة الجزئية من مجموعة المتتاليات التقاربية لوصف وتمييز التقارب إلى نهاية اختيارية L، . . . هي فحوى النظرية المساعدة الأولى.

نظرية مساعدة (lemma) 2.1:

إذا كانت s متتالية و L عدداً فإن $\lim_n s_n = L$ عندما وفقط عندما يكون $\lim_n (s_n - L)$ . . .

البرهان:

إن المتباينة $|s_n - L| < \varepsilon$ مماثلة للمتباينة $|(s_n - L) - 0| < \varepsilon$. إذاً من تعريف . . ب مباشرة يتم التأكد من البرهان.

نظرية مساعدة 2.2:

إذا كانت s متتالية محدودة و t متتالية تافهة، فإن st تكون متتالية تافهة.

البرهان:

نفرض أن $\varepsilon > 0$ وأن $|s_n| < B$ لكل n في N. نختار n بحيث $n > N$ تؤدي الى $|t_n| < \frac{\varepsilon}{B}$. من ذلك $n > N$ تتضمّن:

$$|s_n t_n| = |s_n| |t_n| < B \left(\frac{\varepsilon}{B} \right) = \varepsilon$$

لهذا السبب فإن $\lim_n s_n t_n = 0$.

النظرية المساعدة 2.3:

إذا كانت t متتالية تقاربية ونهايتها ليست صفراً وأيضاً لكل n في N ، $t_n \neq 0$ ، فإن $\frac{1}{t}$ تكون متتالية محدودة.

البرهان:

لنفرض أن $\lim_n t_n = M \neq 0$ ونختار N بحيث يكون $n > N$ تتضمّن أن t_n بين $\frac{M}{2}$ و $\frac{3M}{2}$. اذن $n > N$ تؤدي إلى $|t_n| > \frac{M}{2}$ أو $|\frac{1}{t_n}| < \frac{2}{M}$. الآن نختار:

$B = \max\left\{|\frac{1}{t_1}|، \ldots، |\frac{1}{t_n}|، \frac{2}{|M|}\right\}$ ، فيكون واضحاً أن لكل n يكون $|\frac{1}{t_n}| \leqslant B$.

بعد تسلحنا بهذه النظريات المساعدة نكون قد تجهزنا لبرهنة أن مجموعة المتتاليات التقاربية مغلقة تحت الجمع والطرح والضرب والقسمة. (في حالة القسمة لا بد من زيادة الافتراض حول t حتى نتفادى الصفر في المقام $\frac{s}{t}$).

نظرية 2.3:

لنفرض أن كلاً من s ، t متتالية تقاربية وأن c عدد؛ فإن كلاً من $s + t$ و $s - t$ و cs متتالية تقاربية. أيضاً، إذا كانت $\lim_n s_n = L$ و $\lim_n t_n = M$، فإن

$$\lim_n (s_n + t_n) = L + M$$

وكذلك

$$\lim_n cs_n = cL$$

البرهان:

لنفرض أن $\varepsilon > 0$. نختار N_s و N_t بحيث أن $n > N_s$ تتضمن $|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ وكذلك $n > N_t$ يؤدي إلى $|t_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$. الآن نُعَرِّف $N = \max\{N_s, N_t\}$. إذن $n > N$ يؤدي إلى كلتا الحالتين $n > N_s$ و $n > N_t$ وهما معاً يؤديان إلى:

$$\begin{aligned}|(s_n \pm t_n) - (L \pm M)| &= |(s_n - L) \pm (t_n - M)| \\ &\leqslant |s_n - L| + |t_n - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

لهذا السبب فإن $\lim_n (s_n + t_n) = L \pm M$.

لبرهنة $\lim_n cs_n = cL$، نلاحظ أولاً أنه إذا كان $c = 0$ فإن النتيجة تافهة (trivial)؛ لأن cs_n تكافئ الصفر. لنفرض أن $c \neq 0$ و $\varepsilon > 0$. نختار N بحيث إن $n > N$ يؤدي إلى $|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. الآن كلما كانت $n > N$ يكون لدينا:

$$|cs_n - cL| = |c|\,|s_n - L| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

لهذا السبب فإن $\lim_n cs_n = cL$.

نظرية 2.4:

نفرض أن كلاً من t, s متتالية تقاربية، لنقل أن $\lim_n s_n = L$ و $\lim_n t_n = M$، فإن $s_n t_n$ متتالية تقاربية و $\lim_n s_n t_n = LM$. بالإضافة إلى ذلك إذا كانت t_n لا تساوي 0 و $M \neq 0$، فإن $\frac{s_n}{t_n}$ متتالية متقاربة و

$$\lim_n \frac{s_n}{t_n} = \frac{L}{M}$$

البرهان:

نأخذ التطابق الآتي:

$$\begin{aligned}s_n t_n - LM &= (s_n t_n - Ms_n) + (Ms_n - LM) \\ &= s_n (t_n - M) + M (s_n - L).\end{aligned}$$

بواسطة النظرية 2.1، s محدودة، وبواسطة النظرية المساعدة 2.1، فإن

$$\lim_n (t_n - M) = 0$$

اذن بواسطة النظرية المساعدة 2.2 يكون

$$\lim_n s_n(t_n - M) = 0$$

أيضاً بواسطة النظرية المساعدة 2.1 يكون

$$\lim_n (s_n - L) = 0$$

ومن النظرية 2.3 نجد $\lim_n M(s_n - L) = 0$. وهكذا نكون وضحنا أن $st - LM$ هو حاصل جمع متتاليتين تافهتين. وإذن بواسطة النظرية 2.4، $st - LM$ هي أيضاً متتالية تافهة. لهذا السبب وباستعمال النظرية المساعدة 2.1 نجد أن

$$\lim_n s_n t_n = LM$$

لبرهنة أن

$$\lim_n \frac{s_n}{t_n} = \frac{L}{M}،$$

يكفي أن نبرهن أن

$$\lim_n \frac{1}{t_n} = \frac{1}{M}؛$$

لأننا نستطيع أن نستعمل الاستنتاج السابق لحاصل الضرب $\left(\frac{1}{t_n}\right)(s_n)$ للحصول على الاستنتاج المتعلق بناتج القسمة. باستعمال النظرية المساعدة 2.1، فإن التأكيد

$\lim_n \frac{1}{t_n} = \frac{1}{M}$ يكافىء:

$$\lim_n \left(\frac{1}{t_n} - \frac{1}{M}\right) = 0$$

والذي هو نفسه

$$\lim_n \frac{t_n - M}{t_n M} = 0 \qquad (1)$$

بـواسطة النـظرية المسـاعدة 2.3، $\frac{1}{t}$ محـدودة؛ لأنها متقاربـة نحو نهايـة غير صفـريـة، وبـاستعمال النـظرية المسـاعـدة 2.1، $\lim_n (t_n - M) = 0$. إذن بـاستعـمال النـظريـة المساعدة 2.1، فإن (1) تكون صحيحة ويتم البرهان.

تمارين 2.2

(1) بـرهن أن $s_n = \frac{(2\,n + 3)}{(n + 1)}$ تعرّف متتـالية تقـاربية وذلـك باستخـدام نتائـج هذا البند وكتابة s_n على شكل:

$$\frac{2 + \left(\frac{3}{n}\right)}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)}$$

(2) برهن أن

$$\left\{ \frac{(n^2 - 2n)}{(3\,n^2 + 1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

تكوّن متتالية تقاربية باستعمال الطريقة نفسها التي استعملت في التمرين 1.

(3) في الجزء المتعلق بحاصل القسمة في النظرية 2.4، افترضنا أن

(أ) $t_n \neq 0$ لكل n و (ب) $\lim_n t_n \neq 0$.

وضِّح ضرورة المفترضين بإعطاء مثال، ومعنى ذلك أن (أ) لا يؤدي إلى ب.

(4) وضِّح بإعطاء مثال عـلى أن جمع أو فـرق متتاليتـين متباعـدتين يمكن أن يكـوّن متتاليـة متقاربة.

(5) بـرهن على أنـه إذا كان الجمـع $s + t$ والفرق $s - t$ لمتتـاليتين يكـوّن متتاليتـين متقاربتين، فإن s و t متقاربتان.

(6) برهن بالاستقراء الريـاضي على امكـانية استعـمال النظريـة 2.3 في جمع عـدد نهائي من المتتاليات التقاربية، إذا كان:

$$\lim_n s_n^{(i)} = L_i \quad ، \quad i = 1, 2 ، \ldots ، k$$

فإن :

$$\lim_n \sum_{i=1}^{k} s_n^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} L_i.$$

(7) برهن بالاستقراء الرياضي على امكانية استعمال النظرية 2.3 في ضرب عدد نهائي من المتتاليات التقاربية، إذا كان :

$$\lim_n s_n^{(i)} = L_i \quad ، \quad i = 1,2, ، \ldots ، k$$

فإن

$$\lim_n (s_n^{(1)} s_n^{(2)} \ldots s_n^{(k)}) = L_1 L_2 \ldots L_k$$

(8) لنفرض أن s_n معطاة بالصيغة التالية :

$$s_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \ldots + b_0}$$

عندما $a_k \neq 0$ ، $b_k \neq 0$ والمقام لا يكون صفراً في كل حالات n. برهن على أن :

$$\lim_n s_n = \frac{a_k}{b_k}.$$

2.3 النهايات اللانهائية Infinite limits

هناك حالات تكون فيها المتتالية غير محدودة ولكن سلوكها منتظم بما فيه الكفاية حتى يوصف بشبه النهاية pseudo-limit. هذا المفهوم المفيد هو موضوع هذا البند.

تعريف 2.2:

إذا كانت s متتالية، فإن الجملة «s تؤول الى ما لا نهاية»، والتي يرمز لها

$\lim_n s_n = \infty$ ، تعني أنه إذا كان B أي عدد فإنه يوجد عدد N بحيث إن:

$n > N$ تؤدي إلى $|s_n| > B$.

بالمثل فإن الجملة «s تؤول إلى لانهاية سالبة»، ويرمز لها بالرمز

$$\lim_n s_n = -\infty$$

نعني أنه إذا كان B' أي عدد، فإنه يوجد عدد N' بحيث أن:

$n > N'$ يؤدي إلى $s_n < B'$

ومن المهم أن نؤكد أن مثل هذه المتتالية غير تقاربية وإذن فإن هذه النهايات غير النهائية لا تكون موضع استنتاج للنظريتين 2.1-2.4. من المهم أيضاً أن نلاحظ أنه ليست كل متتالية غير محدودة تؤول إلى ما لا نهاية. ادرس على سبيل المثال، المتتالية

$\{1, 0, 3, 0, 2, 0, 1,...\}$.

نتيجة 2.3:

لنفرض أن s متتالية حيث إن لكل n، $s_n > 0$ ، فإن $\lim_n s_n = \infty$ إذا كان وإذا كان فقط

$$\lim_n \frac{1}{s_n} = 0$$

البرهان: .

بفرض أن $\lim_n s_n = \infty$ وأن $\varepsilon > 0$. استخدم التعريف 2.2 مع $B = \frac{1}{\varepsilon}$ ، لإيجاد عدد N بحيث إن:

(1) $n > N$ تتضمّن $s_n > \frac{1}{\varepsilon}$

بواسطة النتيجة 1.2 فإنّ هذا يكافىء:

(2) $n > N$ الذي يتضمن $\frac{1}{s_n} < \varepsilon$

إذاً $\lim_n \frac{1}{s_n} = 0$

وبما أن (2) يؤدي إلى (1)، فإن العكس يبرهن بطريقة مشابهة.

تمارين 2.3

(1) برهن أن $\lim_n (n^2 - 5n + 1) = \infty$.

(2) برهن أن $\lim_n (n - 7\sqrt{n}) = \infty$.

(3) برهن أن $\lim_n (-n + \sin n) = -\infty$.

(4) برهن أن $\lim_n s_n = \infty$ إذا كان وإذا كان فقط $\lim_n (-s_n) = -\infty$.

(5) برهن على أنه إذا كان كل من s ، t متتالية تؤول إلى ما لا نهاية فإن $s + t$ تؤول إلى ما لا نهاية.

(6) برهن على أنه إذا كان كل من s ، t متتالية تؤول إلى ما لا نهاية فإن $s\,t$ تؤول إلى ما لا نهاية.

(7) وضِّح بالمثال أنه من الممكن لمتتاليتين أن تؤولا إلى ما لا نهاية ولكن ليس بالضرورة أن يؤول الفرق بينهما إلى ما لا نهاية.

(8) وضِّح بالمثال أنه من الممكن لمتتاليتين أن تؤولا إلى ما لا نهاية ولكن ليس بالضرورة أن يؤول حاصل قسمتهما إلى ما لا نهاية.

2.4 المتتاليات الجزئية ونقط النهاية Subsequences and limit points

إن مفهوم المتتالية الجزئية هو مفهوم طبيعي وبسيط في آن. وبما أن المتتالية هي دالة وكل دالة هي تجمع من الأزواج المرتبة، فمن الممكن وضع المتتالية على الصورة:

$$\{(1 ، s_1) ، (2 ، s_2) ، .... ، (n ، s_n) ، ....\}$$

إذا كانت t فئة غير منتهية من هذا التجمع، فإن t تسمى متتالية جزئية من s. لاحظ أن t هي نفسها متتالية؛ لأنها دالة حيث نطاقها فئة جزئية غير منتهية من $\mathbb{N}$. ويتكون نطاق t من كل n في الأزواج المرتبة المكونة للتجمع الجزئي الذي يشكل t.

يمكن اعتبار هذه الحدود الـ n على أنها متتالية تزايدية من الأعداد الصحيحة الموجبة، ولذا تكتب عادةً بهذا الشكل .... ، n_k ، ...... ، n_3 ، n_2 ، n_1 . لهذا السبب فإن الحد الأول لـ t يكتب s_{n_1}، والحد الذي يكون ترتيبه k يكتب s_{n_k}، وفي الحالة العامة:

$$t = \left\{ s_{n_1} ، s_{n_2} ، .... ، s_{n_k} ، .... \right\} = \left\{ s_{n_k} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

في بعض الأحيان يكون الأمر مملاً عند كتابة الدليل الأسفل لدليل أسفل، ولهذا السبب فإننا نكتب $s_{n(k)}$ للدلالة على الحد الذي يكون ترتيبه k للمتتالية الجزئية من s. إذا كانت صيغة n_k أو n (k) معروفة وبسيطة، فإننا نكتبها بمثابة الدليل السفلي. فعلى سبيل المثال:

$$\left\{ s_{2k} \right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ s_2 ، s_4 ، s_6 ، ... \right\}$$

والتي تسمى المتتالية الجزئية للحدود ذات التصنيف الزوجي. وذلك مثل:

$$\left\{ s_{2\,k-1} \right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ s_1 ، s_3 ، s_5 ، ..... \right\}$$

والتي تسمى المتتالية الجزئية لدليل الحدود الفردية.

لا بد أن نؤكد على أن حدود المتتالية الجزئية تبقى في الترتيب نفسه الموجودة فيه في المتتالية الأصلية. وهذا التأكيد مُتضمَّن في واقع اختيار الرموز السفلية $n_1, n_2, \ldots$ في ترتيب تصاعدي.

وهكذا إذا كانت $s = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ فإن:

$\left\{ \frac{1}{2} ، \frac{1}{4} ، \frac{1}{6} ، \frac{1}{8} ، .... \right\}$ متتالية جزئية من المتتالية s.

ولكن

$\left\{ \frac{1}{2} ، \frac{1}{4} ، \frac{1}{6} ، \frac{1}{8} \right\}$ ليست متتالية جزئية من المتتالية s.

مفترض 2.1:

إذا كانت s متتالية محدودة فإن كل متتالية جزئية من s تكون محدودة.

البرهان:

انظر التمرين 2.4.1.

مفترض 2.2:

إذا كانت s متتالية تتقارب إلى L، فإن كل متتالية جزئية من s تتقارب إلى L أيضاً.

البرهان:

أنظر التمرين 2.4.2.

فيما بعد نقدم مفهوم نقطة النهاية limit point، وهو مفهوم مرتبط بالمتتاليات الجزئية ويشكّل امتداداً لفكرة النهاية في المتتاليات التقاربية.

تعريف 2.3:

يسمى العدد λ نقطة نهاية للمتتالية s بشرط أن يكون لـ s متتالية جزئية تتقارب إلى λ.

بعض الكتاب يستخدمون مصطلح نقطة التعنقد Cluster point أو نقطة التراكم Accumulation point بدلاً من نقطة النهاية. لهذا لا بد أن يكون القارىء حذراً بالفعل من الخلط بين نقطة النهاية للمتتالية ونهاية المتتالية. على سبيل المثال، المتتالية:

$$s = \left\{1 \text{،} \frac{1}{2} \text{،} 1 \text{،} \frac{1}{3} \text{،} 1 \text{،} \frac{1}{4} \text{،} \ldots\right\}$$

لها نقطتي نهاية هما 0، 1 لأن

$$\lim_k s_{2k} = \lim_k \frac{1}{k+1} = 0$$

و

$$\lim_k s_{2k-1} = \lim_k 1 = 1$$

ولكن s لا توجد لها نهاية، لأنها تباعدية.

هذا المثال يوحي لنا بالنتائج العامة التالية:

مفترض 2.6:

اذا كانت s متتالية تقاربية فإن s لها نقطة نهاية واحدة فقط.

البرهان:

انظر التمرين 2.4.4.

يعطينا المفترض 2.6 طريقة ملائمة لإثبات أن المتتالية غير تباعدية، وبالتحديد، لإظهار وبرهان إمكانية وجود متتاليتين جزيئيتين تقاربيتين ذاتا نهايتين غير متساويتين.

تمارين 2.4

(1) برهن المفترض 2.4.

(2) برهن المفترض 2.5. (إرشاد: بما أن الأدلة السفلية n_k للمتتالية الجزئية $\{s_{n_k}\}$ مرتبة تصاعدياً، فإننا نستنتج من ذلك أن:

$n_k \geqslant k$ لكل $(k = 1، 2 ، \ldots)$.

(3) أعْطِ مثالاً لمتتالية غير محدودة ذات متتالية جزئية تقاربية.

(4) برهن المفترض 2.5.

في التمرينات من 5 إلى 8 أوجد جميع نقط النهاية للمتتالية s.

(5) $$s_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n}$$

(6) $$s = \left\{0 ، 1 ، 0 ، \frac{1}{2} ، 1 ، 0 ، \frac{1}{4} ، \frac{1}{2} ، \frac{3}{4} ، 1 ، \ldots\right\}$$

(7) $$s = \left\{0 ، 1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، \ldots..\right\}$$

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{2n+1}{n} & \text{if} \quad n = k^2 \quad ، \quad k \in \mathbb{N} \\ (-1)^n & \text{if} \quad n \neq k^2 \end{cases} \qquad (8)$$

(9) برهن عدم وجود نقطة نهاية للمتتالية s، عندما وفقط عندما يتحقق الشرط:

$\lim_n |s_n| = \infty$.

2.5 المتتاليات المطّردة Monotonic sequences

في مناقشتنا للمتتالية الجزئية لاحظنا أن الدليل السفلي n_k «تزايدي».

نفترض أن القارىء على اطلاع بالدوال التزايدية والتناقصية وسنطبق هذه المعلومات على المتتاليات.

تعريف 2.4:

تكون المتتالية s تزايدية (أو تناقصية) بشرط أن يكون $s_n < s_{n+1}$ أو $(s_n > s_{s+1})$ ، لكل n. بالمثل فإن s تكون غير تناقصية (أو غير تزايدية) بشرط أن يكون $s_n \leqslant s_{s+1}$ أو $(s_n \geqslant s_{n+1})$ لكل n.

إذا حققت s أي شرط من هذه الشروط الأربعة فإن s تسمى متتالية مطردة؛ لأن سلوك المتتاليات المطّردة منتظم ولهذا يكون من السهل معرفة وتحديد تقاربها. هذه الحقيقة تظهر في النظرية التالية والتي تعتبر نتيجة أساسية (انظر التمرين 2.5.12).

نظرية 2.5: (نظرية المتتالية المطردة)

تكون تقاربية المتتالية المطردة عندما وفقط عندما تكون محدودة.

البرهان:

نلاحظ أولاً أن التضمين في أحد الاتجاهين قد بُرهن سابقاً في النظرية 2.1، وهو إذا

كانت s غير محدودة فإنها تكون تباعدية. لـبرهنة التضمـين العكسي، ندرس أولاً الحـالة التي تكـون فيها s غـير تنـاقصيـة ومحـدودة من أعـلى (لاحظ أن هـذه الحـالـة تتضمن المتتـاليـات التزايدية). وأيضاً ليس من الضروري أن نشترط أن تكون المتتالية غير التناقصيـة محدودة من أسفـل، لأن حدهـا الأول لا بد أن يكـون حداً أسفـل). وباستعـمال مسلمة LUB، يـوجد أصغر حد أعلى لنطاق s ولنقل

$$\beta = \text{lub}\left\{s_n : n \in \mathbb{N}\right\} .$$

لأي عدد موجب ε فإن $\beta - \varepsilon$ لا يكون حداً أعلى للمتتالية s. لهـذا السبب يوجـد N بحيث إن $s_{n'} > \beta - \varepsilon$. وبما أن s غير تناقصية و β حـد أعلى للمتتـالية s فـإن $n > N$ تتضمن:

$$\beta - \varepsilon < s_{n'} \leqslant s_n \leqslant \beta < \beta + \varepsilon$$

لهذا السبب فإن $n > N$ تؤدي إلى $|s_n - \beta| < \varepsilon$ ومنها

$$\lim_n s_n = \beta .$$

بالأسلوب نفسه نستطيع أن نبرهن على أنه إذا كانت s غير تزايدية ومحدودة من أسفل فإن:

$\lim_n s_n = \text{glb}\left\{s_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ وهذا ينهي البرهان.

في الواقع إننا أثبتنا أكثر مما تنص عليه النظرية 2.5 في البرهان السابق. فلقد أثبتنا أنـه إذا كانت s غير تناقصية ومحدودة من أسفل فـإن s تقترب إلى أصغـر حد أعـلى من نطاقهـا. من المفيد في بعض الأحيان أن نستعمـل نظريـة المتتاليـات المطّردة في هـذا الشكل حتى نحصـل بالضبط على قيمة نهاية المتتالية s.

تماريـــن 2.5

(1) أوجد متتالية جزئية مطردة للمتتالية:

$$\left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

(2) أوجد متتالية جزئية تزايدية للمتتالية:

$$s = \left\{0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 0, \ldots\right\}$$

(3) أوجد متتالية جزئية غير تزايدية للمتتالية :

$$s = \left\{0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots\right\}$$

(4) في برهان النظرية 2.5، أعط التفاصيل لإثبات الحالة التي تكون فيها المتتالية غير تزايدية ومحدودة من أسفل.

في التمارين من 5 إلى 7، برهن على أن s مطّردة.

(5) $s_n = \dfrac{n+1}{n}$

(6) $s_n = r^n$ عندما يكون $r \geqslant 0$.

(7) $s_n = \dfrac{2^n}{n!}$

(8) برهن : إذا كان كل من s, t متتالية غير تناقصية فإن $s + t$ غير تناقصية.

(9) أعط مثالاً لمتتاليتين مطَّرَدتين بحيث يكون الجمع متتالية غير مطَّردةَ.

(10) برهن : إذا كانت s متتالية غير محدودة، فإن للمتتالية s متتالية جزئية مطّردة.

(11) برهن : إذا كانت s متتالية مطردة للأعداد الموجبة، فإن $\dfrac{1}{s}$ تشكّل أيضاً متتالية مطردة.

(12) أثبت أن نظرية المتتاليات المطردة تؤدي إلى (تتضمّن) مسلمة أصغر حد أعلى.

(13) برهن على أن نظرية قطع ديدكِند (Dedekind cut theorem) في التمرين 1.3.14 تؤدي إلى مسلمة أصغر حد أعلى.

الفصل الثالث

3

كمال الأعداد الحقيقية

(Completeness of the Real Numbers)

3.1 نظرية بولتزانو - ڤيرشتراس

نبحث في هذا الباب بعض المفاهيم والنتائج المتعلقة مباشرة بمسلمة أصغر حد أعلى (LUB). في الواقع أن أبرز نظريات هذا الباب تتكون من أربع مقولات تكافىء مسلمة اصغر حد أعلى في R، أي أن أية مقولة من هذه المقولات الأربع يمكن اعتبارها كمسلمة، حيث تستنتج المقولات الثلاث الأخرى منها. وقد قابلنا بالفعل نتيجتين مماثلتين هما بالتحديد: نظرية قطع ديدكند (تمرين 1.3.14)، ونظرية المتتالية (المتتابعة) المطردة (نظرية 2.5). وقد أكدنا في تمريني 2.5.12 و 2.5.13 أن كلاً من هاتين النظريتين تؤدي إلى مسلمة اصغر حد أعلى (تتضمنها). وعند تطوير أساس منظومة الأعداد الحقيقية يكون من المهم للغاية أن نثبت تكافؤ هذه الخواص المختلفة. غير أن هدفنا هو استنتاج نظريات النهايات والتقارب في R، ولذا يجب علينا أن نقتصر في هذا الباب فقط على اثبات أن مسلمة أصغر حد أعلى تتضمّن الخواص الجديدة.

وتتعلق النظرية الأولى من نظريات الكمال الأربع لهذا الفصل بالمتتاليات المحدودة. ويجدر بنا أن نؤكد الملاحظة التالية: يكون للمتتاليات المحدودة عدد غير نهائي من الحدود في فترة منتهية (finite)، ولذا فإن الحدود يجب أن تتعنقد (cluster) في مكان ما، مما يعني أن هناك نقطة نهاية أو متتالية جزئية تقاربية، ويمكن أن نثبت ذلك بسهولة بعد أن نثبت النظرية المساعدة التالية:

نظرية مساعدة (lemma) 3.1:

لكل متتالية توجد متتالية جزئية مطَّردة.

البرهان:

نقدم أولاً مفهوم تجمع المتتاليات الجزئية الذيلية من المتتالية («tail end» subsequences) s_1 , s_2 , ...، حيث:

$$S_n = \{s_N, s_{N+1}, \dots\}, \dots, s_2 = \{s_2, s_3, \dots\}.$$

وهناك حالتان جديرتان بالبحث: الأولى: نفرض أن بعض S_N ليس لها حد أكبر، عندئذ يكون من الواضح أن S_N تحتوي على متتالية جزئية تزايدية؛ لأنه لكل حد مختار يوجد حد تالي له أكبر منه. وبذلك يكون للمتتالية s متتالية جزئية متزايدة؛ لأن أية متتالية جزئية من s_n هي أيضاً متتالية جزئية من s. والآن نعتبر الحالة عندما يكون لكل S_N حد أكبر. بفرض أن $s_{k(1)}$ هو أكبر حد للمتتالية S_1 (= s) . (عندما تكون القيمة الكبرى نفسها لأكثر من حد فإننا نختار $s_{k(1)}$ ليكون هو الحد الأول من بين هذه الحدود). والآن نعتبر $(s_{1+k(1)} = \{s_{1+k(1)}, s_{2+k(1)}, \dots\}$ ونفرض أن $s_{k(2)}$ هو أكبر حد فيها، وحيث إن $s_{1+k(1)}$ متتالية جزئية من s_1 فإن حدها الأكبر لا يمكن أن يزيد عن الحد الأكبر في s_1، أي أن $s_{k(1)} \geqslant s_{k(2)}$. وبعد ذلك نفرض أن $s_{k(3)}$ هو الحد الأكبر في $s_{1+k(2)}$، ومن ثم $s_{k(2)} \geqslant s_{k(3)}$. وبالاستمرار على هذا المنوال يمكننا دائماً اختيار الحد التالي $s_{k(n+1)}$ الذي يكون هو الحد الأكبر في $s_{1+k(n)}$ والذي يعطي $S_{k(n)} > s_{k(n+1)}$. وهكذا $\{s_{k(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية جزئية لا تزايدية من s. ومن هنا ففي كلتا الحالتين يكون للمتتالية s متتالية جزئية مطردة.

وقبل تطبيق هذه النظرية المساعدة على المتتاليات المحدودة يجب أن نلاحظ العمومية الشاملة لما تتضمنها. لقد أثبتنا أنه لأيٍ متتالية ـ محدودة أو غير محدودة، تقاربية أو أياً كانت، هناك متتالية جزئية مطَّردَة. ولذا فعلى الرغم من أن برهان النظرية المساعدة يحتوي على بناء مطول فقد حصلنا في المقابل على الكثير.

نظرية 3.1: نظرية بولتزانو ـ ڤيرشتراس:

إذا كانت s متتالية محدودة عندئذٍ يكون لها متتالية جزئية تقاربية.

البرهان :

وفقاً للنظرية المساعدة 3.1 يكون للمتتالية s متتالية جزئية مطّردة t. ويجب أن تكون t محدودة؛ لأن s محدودة، وبذلك ووفقاً لنظرية المتتالية المطردة فإن t تقاربية.

3.2 متتاليات كوشي (Cauchy Sequences)

يكمن هدفنا التالي في استنتاج معيار يحدد تقارب المتتالية دون الرجوع إلى القيمة النهائية للمتتالية؛ وللقيام بذلك نقدم مفهوم متتالية كوشي.

تعريف 3.1:

تسمى المتتالية s بمتتالية كوشي إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد N بحيث إن:

$m > N$ ، $n > N$ يؤديان إلى $|s_m - s_n| < \varepsilon$ (1)

وعادة يكتب السطر الأخير (1) من التعريف في صورة موجزة كما يلي:

$m, n > N$ تتضمّن $|s_m - s_n| < \varepsilon$

ويمكن تَصوُّر ذلك بالقول أنّ حدي s يقتربان كل إلى الآخر بأية درجة نريد. إنّ مقارنة ذلك تعريف التقارب الذي ينص على أن حدود s تقترب بأية درجة نريد إلى عدد ما L، تمكننا من برهان أن هذين المفهومين متكافئان لمتتاليات الأعداد الحقيقية. وعلينا في البداية أن نستنتج بعض الحقائق حول متتالية كوشي.

إذا كانت s متتالية كوشي، فمن السهل رؤية أن:

$$\lim_n (s_{n+1} - s_n) = 0 ;$$

ذلك أنّ العدد m في (1) يمكن أن يكون $n+1$ ممّا يؤدي إلى

$$|s_{n+1} - s_n| < \varepsilon$$

طالما كان $n > N$. وبالمثل يمكن أن نستبدل m بـ $n+2$ أو $n+3$ ، $n+k$ لأيّ عدد صحيح موجب k . وهذا يبين أنه إذا كانت s هي متتالية كوشي و k في N فإن

$$\lim_n (s_{n+k} - s_n) = 0 .$$

ومن المهم الانتباه إلى أن هذه الخاصية الأخيرة ليست قوية بدرجة كافية لنستنتج منها أن s يجب أن تحقق معيار كوشي الوارد في التعريف 3.1.

مثــال 3.1:

إذا كانت

$$s = \left\{0 ، \frac{1}{2} ، 1 ، \frac{2}{3} ، \frac{1}{3} ، 0 ، \frac{1}{4} ، \frac{1}{2} ، \frac{3}{4} ، 1 ، \frac{4}{5} ، \ldots\right\}$$

عندئذ لأي عدد صحيح k يكون $\lim_n (s_{n+k} - s_n) = 0$ غير أن s ليست متتالية كوشي. (وتُترك تفاصيل هذا المثال للقارىء في التمرين 3.2.2).

نثبت فيما يلي خاصية لمتتاليات كوشي يستعان بها في برهان النظرية التي ستليها.

نظرية مساعدة 3.2:

إذا كانت s متتالية كوشي فإنّ s متتالية محدودة.

البرهان:

نفرض أن s متتالية كوشي ونطبّق التعريف 3.1 لحالة $\varepsilon = 1$. وبذلك يوجد N بحيث إن $m, n > N$ تتضمّن $|s_m - s_n| < 1$. وحيث إن هذه المتباينة تتحقق لكل $m > N$ يمكننا استبدال m بـ $N+1$ والقول بأن $|s_{N+1} - s_n| < 1$ طالما أن $n > N$ ، وهذا يكافىء:

$$s_{n+1} - 1 < s_n < s_{n+1} + 1 \quad \text{طالما} \quad n > N .$$

وهكذا:

$$n > N \quad \text{تؤدي إلى} \quad |s_n| < |s_{N+1}| + 1$$

والآن وبحصولنا على ذيل محدود لـ (s) نستطيع تعريف العدد B كما يلي:

$$B = \max \left\{ |s_1|, \ldots, |s_N|, |s_{N+1}| + 1 \right\}$$

ومن الواضح أن $|s_n| \leqslant B$ لأي n.

نظرية 3.2 معيار كوشي للتقارب (اختبار كوشي للتقارب):

تكون المتتالية s تقاربية عندما وفقط عندما تكون متتالية كوشي.

البرهان:

نفرض في البداية أن s تقاربية، وليكن $\lim_n s_n = L$ ، ونفرض أن $\varepsilon > 0$. عندئذ يمكننا اختيار N بحيث إن $n > N$ يؤدي إلى

$|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. وهذا كالقول بأن $m > N$ يؤدي إلى

$|s_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. وهكذا يكون لدينا للقيم $m, n < N$:

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |(s_m - L) - (s_n - L)| \\ &\leqslant |s_m - L| + |s_n - L| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

وبذلك فإن s هي متتالية كوشي.

ولإثبات العكس، نفرض أن s هي متتالية كوشي، وبذلك ووفقاً للنظرية المساعدة 3.2 تكون s محدودة. ووفقاً للنظرية 3.1 فإن للمتتالية s متتالية جزئية متقاربة ولتكن $\lim s_{k(n)} = L$. وإذا كان $\varepsilon > 0$ ، نختار N بحيث إن $m, n > N$ تؤدي إلى

$|s_m - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. وحيث إن $\lim_n s_{k(n)} = L$ يمكننا اختيار حد ما من هذه المتتالية الجزئية يكون له

$k(n) > N$ و $|s_{k(n)} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. والآن فإن $n > N$ تؤدي إلى:

$$\begin{aligned}|s_n - L| &= |(s_n - s_{k(n)}) + (s_{k(n)} - L)| \\ &\leqslant |s_n - s_{k(n)}| + |s_{k(n)} - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

ومن ثمّ فإن s تتقارب إلى L.

وإذا أمعنا النظر لرأينا مرة أخرى أننا أثبتنا أكثر مما تنص عليه النظرية صراحة. ففي الجزء الأول من البرهان استعنا فقط بتعريف التقارب ومتتالية كوشي، وبذلك فإن هذا التضمين لا يعتمد على مسلمة أصغر حد أعلى (L U B) . ومن ثم فإنه حتى لمنظومة أعداد مثل Q، والتي - كما هو موضح في مثال 3.2 - لا تحقّق مسلمة أصغر حد أعلى، أو النظريتين 3.1، 2.5، تكون المتتالية التقاربية أيضاً متتالية كوشي. أما التضمين العكسي فهو يرتبط ارتباطاً وثيقاً بمسلمة أصغر حد أعلى؛ فهذا التضمين يضمن لأية متتالية تحقق معيار كوش وجود قيمة نهائية تتقارب إليها. وتسمى المنظومة التي يتحقق لها هذا التضمين بالمنظومة الكاملة (complete). ومن الأفضل توضيح ذلك على مثال منظومة غير كاملة.

مثال 3.2:

نعتبر Q فئة الأعداد القياسية.

من تمرين 1.3.2 توجد متتالية r في Q تتقارب إلى $\sqrt{2}$ وهو عدد لاينتمي إلى Q. ووفقاً للجزء الأول من نظرية 3.2 فإن r متتالية كوشي. غير أنه لا توجد نهاية في Q تتقارب إليها r. وبذلك فإن Q غير كاملة (incomplete).

3.3 نظرية الفترات المتداخلة The Nested Intervals Theorem

تتعلق النظرية التالية حول كمال $\mathbb{R}$ بمتتاليات الفترات؛ ولهذا يجب علينا أن نراجع باختصار بعض الرموز والمصطلحات. إذا كان a, b عددين حقيقيين بحيث يكون $a \leqslant b$ فإن كلاً من الفئات التالية تسمى بالفترة:

$$(a, b) = \{r \in R : a < r < b\},$$

$$[a, b) = \{r \in R : a \leqslant r < b\},$$

$$(a, b] = \{r \in R : a < r \leqslant b\},$$

$$[a, b] = \{r \in R : a \leqslant r \leqslant b\}.$$

يسمى النوع الأول (a, b) بالفترة المفتوحة، ويسمى النوع الرابع $[a, b]$ بالفترة المغلقة. أما النوعان الآخران فيسمى كل منهما بالفترة نصف المفتوحة أو بالفترة نصف المغلقة.

متتالية الفترات $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ يمكن وصفها بمتتالية نقط نهايتيها، لنقل مثلاً: $I_n = [a_n ، b_n]$. وإذا كان لكل n $I_{n+1} \subseteq I_n$ فإن $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ تسمى بمتتالية الفترات المتداخلة. ومن الواضح في هذه الحالة أن:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = I_N \,.$$

ونحن مهتمون بالتقاطع

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

الذي يتكون من تلك الأعداد r التي تقع في كل فترة من الفترات I_n. وقد يكون هذا التقاطع فئة خالية ومع ذلك فالفترات متداخلة (انظر تمرين 3.6.6). غير أن هذا لا يمكن أن يحدث إذا تكونت المتتالية من فترات مغلقة. وكما سنرى في برهان النظرية التالية يعتمد تأكيدنا هذا على مسلمة أصغر حد أعلى بواسطة نظرية المتتالية المطردة.

نظرية 3.3 ـ نظرية الفترات المتداخلة:

إذا كانت $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الفترات المغلقة فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$.

البرهان:

نفرض أن I_n هي الفترة $[a_n, b_n]$. ومن الواضح أن متتاليتي نقط النهايات مطّردتان: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ لا تناقصية و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ لا تزايدية. وعلاوة على ذلك فلأية k, n يكون $a_k \leqslant b_n$ ؛ لأنه إذا كان $k < n$ فإن

$a_k \leqslant a_n \leqslant b_n$ ، وإذا كان $k < n$ فإن $a_k \leqslant b_k \leqslant b_n$ وبذلك فإن $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ محدودة من أعلى بواسطة أي b_n. ولذا ووفقاً للنظرية 2.5 تكون $\{a_k\}_{n=1}^{\infty}$ تقاربية. وكذلك ووفقاً للمفترض 2.2 يكون:

$\alpha = \lim_k a_k \leqslant b_n$ لأي n. ومن ثم فلكل n يكون $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$. أي أن α في $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ، مما يبين أن التقاطع ليس فئة خالية (وبالطبع كان يمكننا أن نبين أن $\lim_n b_n$ موجودة في:

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ بتحليل مماثل، ولكن نقطة واحدة كافية).

في التمرين 3.4.6 يطلب منك أن تبين بمثال أن تضمين النظرية 3.3 لا يصلح ما لم تكن الفترات مغلقة.

3.4 نظرية التغطية لهاين وبوريل(*)

سنعطي في النظرية التالية معياراً يعبر عن كمال $\mathbb{R}$ بالاستعانة بالفترات المفتوحة. إذا كانت s فئة جزئية من R وكان g تجمعاً من فترات مفتوحة فإن g يسمى بالغطاء المفتوح (open cover) للفئة s إذا كان كل عنصر في s واقعاً في عضو واحد على الأقل من g. وبالرموز النظرية للفئات

$s \subseteq \bigcup_{I \in g} I$. كما يوصف ذلك أيضاً بالعبارة «g تغطي s» ولن نفرض في مناقشتنا التالية قيوداً على عدد الفترات في التجمع g. وبذلك يمكن أن يكون لـ g عدد كبير بلا حدود من الأعضاء أو حتى عدد غير قابل للعدد، أي يمكن أن يكون للتجمع g عدد كبير من الأعضاء لدرجة لا يمكن معها وضع هذه الأعضاء في تناظر واحد - إلى - واحد (One-to-one correspondance) مع N (انظر الملحق B).

وقد يحتوي التجمع g في بعض الحالات على عدد من الفترات، أكثر من المطلوب،

(*) هاين (Heine) هنريك إدوارد عالم ألماني (1821-1881).

(*) بوريل (Borel) فيلكس ادوارد جوستين إميل عالم فرنسي (1871-1956) (المترجم).

لتغطية فئة معطاة s. على سبيل المثال إذا كان للفئة s عدد محدود من العناصر، فإنها تحتاج في تغطيتها للعدد المحدود نفسه من الفترات، على الأكثر. وكمثال أقل بساطة: نـأخذ الـوضعية التالية:

مثـــال 3.3:

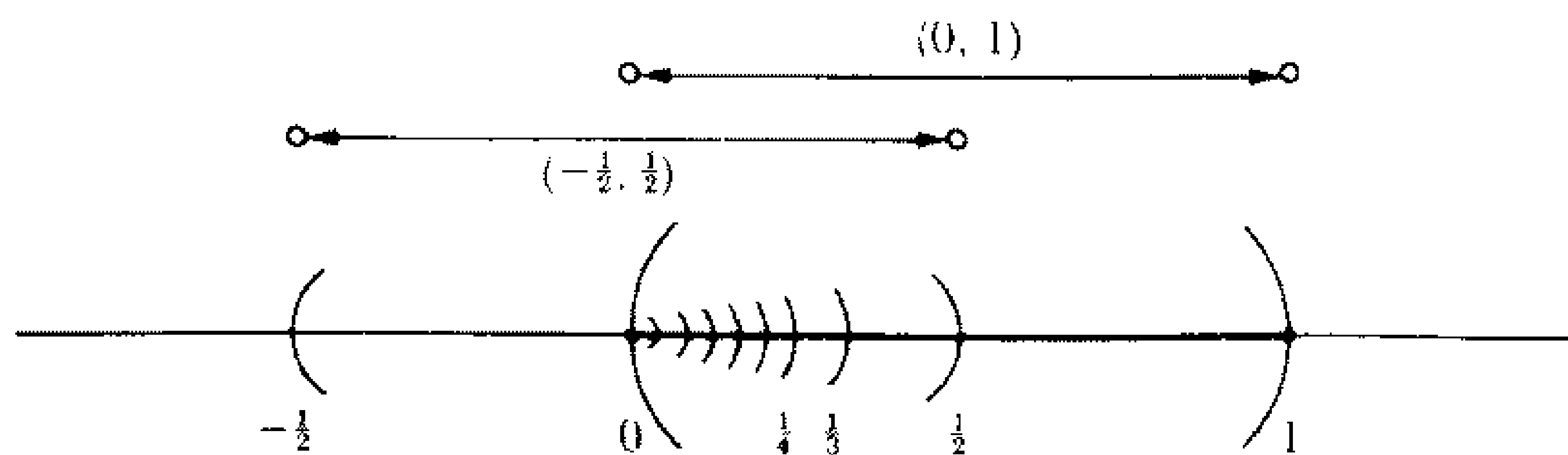
نفرض أن s هي الفترة $[0, 1)$، وأن g تتكون من الفترات

$$\left\{\left(0 ، \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

بالإضافة إلى

$$\left(-\frac{1}{2} ، \frac{1}{2}\right)$$

أنظر شكل 3.1.



شكل (3.1)

ومن الواضح أن g يشكل غطاء مفتوحاً للفئة s، ولكن g تغطي s بـلا فعاليـة. ذلك ان عدداً محدوداً فقط من أعضاء g يلزم لتغطية s:

$$s \subset \left(-\frac{1}{2} ، \frac{1}{2}\right) \cup (0, 1).$$

إن الفـترتين اللتـين تغطيـان s في مثال 3.3 تسميـان بالغـطاء الجزئي المنتهي (أو النهـائي) (finite) من g. وخاصية قابلية تغـطية s بغـطاء جزئي منتهي (نهائي) هي مـوضوع النتيجـة التالية.

نظرية 3.4 نظرية التغطية لهاين وبوريل :

إذا كانت J فترة مغلقة، و g غطاء مفتوحاً للفترة J فإنه يوجد تجمع جزئي منتهى من g يغطي J.

البرهان :

نفرض أن تأكيد النظرية غير صحيح. ونفرض أن J هي الفترة المغلقة [a, b]، وأن g غطاءً مفتوحاً للفترة J لا يمكن أن يؤول إلى غطاء جزئي منتهى. نعتبر الفترتين الجزئيتين

$$\left[a, \frac{(a+b)}{2}\right] ، \left[\frac{(a+b)}{2}, b\right] .$$

واحدى هاتين الفترتين الجزئيتين على الأقل لا يمكن أن تغطى بعدد نهائي من أعضاء g؛ لأنه إذا أمكن تغطية الفترتين فإنه يمكن توحيد الغطائين الجزئيين النهائيين في غطاء جزئي نهائي (أو منتهى) للفترة [a, b].

نفرض أن J_1 هي احدى هاتين الفترتين الجزئيتين بحيث لا يمكن تغطية J_1 بأي تجمع جزئي نهائي من g، ونقسم J_1 إلى فترتين جزئيتين متساويتي الطول

$$\frac{(b-4)}{4} .$$

وكما سبق فإن احدى هاتين الفترتين الجزئيتين على الأقل لا يمكن أن تغطى بأي تجمع جزئي نهائي من g، ولتكن هذه الفترة الجزئية هي J_2. وبالاستمرار في تنصيف الفترات الجزئية بهذه الطريقة: فإن J_n تقسم إلى فترتين جزئيتين طول كل منهما

$$\frac{(b-a)}{2}\ n+1$$

وعلى الأقل فاحداهما لا يمكن أن تغطى بأي تجمع جزئي نهائي من g. ولتكن هذه الفترة الجزئية هي J_{n+2}.

والبناء السابق لا ينتهي، بالتالي يؤدي إلى متتالية متداخلة من الفترات المغلقة $\{J_n\}_{n+1}$. ومن نظرية 3.3 يوجد العدد µ في كل J_n، ولكن µ أيضاً في J ولذا فإن µ لا

بد أن يُغطى بفترة ما I في g، وليكن $\mu \in I = (c, d)$. وحيث إن

$$\lim_n \frac{(b - a)}{2^n} = 0$$

يوجد ذلك العدد N الكبير بدرجة كافية بحيث يكون

$$\frac{(b - a)}{2^n} < \min\{\mu - c, d - \mu\}$$

وبذلك فإن طول J_N أقل من البعد بين μ وبين كـل من نقطتي نهايتي I. وحيث ان μ في J_N فنحن نؤكد أن J_N يجب أن يقع كلية في I. ولاثبات ذلـك نفرض أن p عنصر اختيـاري من J_N. عندئذ فإن:

$$\mu - p \leqslant |\mu - p| \leqslant \frac{(b - a)}{2^N} < \mu - c$$

ومنها ينتج أن $c < p$، وأيضاً

$$p - \mu \leqslant |p - \mu| \leqslant \frac{(b - a)}{2^N} < d - \mu$$

ومنها ينتج أن $p < d$. وبـذلـك فـإن $c < p < d$ ممـا يعني أن p في I. ومن ثم فـإن $J_N \subseteq I$. خلال عملية البناء السابق تم اختيار J_N بحيث إنه لا يمكن تغطيتها بواسطة أي تجمـع جزئي نهائي من g. ولكن كنا قـد بيّنا أن J_N مغـطاة بفترة منفـردة من g. وكـل من المقولتين المتناقضتين نتيجة صحيحة من الافتراض الأصلي، لذا نستنتج أن افـتراضنا الأصـلي كان خاطئاً. وبالتالي فإن توكيد النظرية يجب أن يكون صحيحاً. وبذلك أتممنا البرهان.

إن البرهان أعلاه صعب على نحو لا يمكن انكاره سواء من ناحية براعة منطقه أو تفاصيل بنائه. وفي هذه المرحلة الدراسية يطلب من الطالب أن يثق بأن هذه النتيجة تستحق المجهود المبذول في برهانها. فكما سنرى في براهـين لاحقة تكـون نظريـة هاين ـ بوريل أداة ذات قوة كبيرة وتطبيقات واسعة.

وكما في حالة نظرية الفترات المتداخلة، فالفترة التي نحن بصددها في النظرية 3.4 يجب أن تكون مغلقة ومحدودة، وإلا فلن يكون لهـا خاصيـة هاين ـ بوريل للتغطيـة، حيث نستعرض ذلك في التمارين 3.4.9، 3.4.10.

3.4 تمارين

1 ـ أثبت أن: المتتالية المحدودة s تقاربية عندما، وفقط عندما يكون لـ s نقطة نهاية واحدة بالضبط. (ارشاد: انظر المفترض 2.6).

2 ـ نفرض أن s متتالية تحقق الخاصية التالية:

إذا كان $\varepsilon > 0$ ، $k \in N$ فإنه يوجد N بحيث إن $n > N$ تؤدي إلى

$$|s_{n+1} - s_n| < \varepsilon \, .$$

بيّن أن ذلك لا يتضمّن أن s هي متتالية كوشي، وذلك بالأخذ في الاعتبار المثال المضاد التالي:

$$S = \{0 ، \frac{1}{2} ، 1 ، \frac{2}{3} ، \frac{1}{3} ، \cup ، \frac{1}{4} ، \frac{1}{2} ، \frac{3}{4} ، 1 ، \frac{4}{5} ، \ldots\}$$

3 ـ اكتب صيغة s_n ـ الحد النوني لمتتالية تمرين 2 السابق.

4 ـ نفرض أن $U = (0, 1]^*$. بين أن متتالية كوشي في U لا تتقارب إلى نهاية في U.

5 ـ إذا كانت s معطاة كما يلي:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \\ + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} ,$$

هل s هي متتالية كوشي؟

6 ـ بيِّن بمثال أنه إذا كانت الفترات غير مغلقة فإن متتالية الفترات المتداخلة يمكن أن تكون ذات تقاطع خالي.

(ارشاد: $I_n = (0 , \frac{1}{n}]$).

7 ـ هل من المحتمل لمتتالية الفترات المفتوحة المتداخلة أن تكون ذات تقاطع غير خالي؟

8 ـ وضِّح بمثال أن الفترات نصف المغلقة $[\infty ، a_n)$ لا تعوض الفترات المغلقة في نظرية الفترات المتداخلة، أي أعط فئات متتالية

$[a_1 ، \infty) \supseteq [a_2 ، \infty) \supseteq ....$ تكون ذات تقاطع خالي.

9 - افرض أن J هي الفترة $(0, 1)$، عين غطاء مفتوحاً g بحيث لا يغطي أي تجمع جزئي نهائي من g الفترة J.

10 - افرض أن $P = (0 ، \infty)$ وعين غطاء مفتوحاً g بحيث لا يعطي أي تجمع جزئي نهائي من g الفترة P.

11 - افرض أن S فئة اختيارية لا محدودة في R وعين غطاء مفتوحاً g بحيث لا يغطي أي تجمع جزئي نهائي من g الفئة S.

12 - لنفترض أن s متتالية تقاربية بحيث انه لكل n يكون

$$s_n \neq L = \lim_n s_n ،$$

وان S يرمز إلى مدى s أوجد غطاء مفتوحاً g من S بحيث لا يغطي أي تجمع جزئي من g المدى S.

الفصل الرابع

4

الدوال المتصلة

Continuous functions

4.1 الاتصال Continuity

في الفصول السابقة كان اهتمامنا مركزاً ـ في معظم الأحيان ـ على دوال نطاقها الفئة $\mathbb{N}$؛ بمعنى آخر على المتتاليات. في التفاضل والتكامل تعاملنا مع دوال نطاقها فترات، أنصاف خطوط أو كل $\mathbb{R}$. نحن الآن مستعدون لعرض نظرية النهايات لهذا النوع من الدوال. والمعلومات التي اكتسبناها من دراسة المتتاليات ستساعدنا مساعدة عظيمة في تقليل عبء العمل مع (ابسلن epsilan ـ دلتا delta) والذي سيواجهنا في معظم الأحيان.

في المناقشة التالية f دالة نطاقها ومداها فئتان جزئيتان من $\mathbb{R}$. الجملة «العدد a يكون داخل نطاق f» معناها توجد فترة مفتوحة $(a - \delta ، a + \delta)$ محتواة بالكامل في نطاق f. وهذا يضمن أن f تكون معرفة عندما يكون x قريباً جداً من a وهذا يؤدي إلى أن a نفسها في نطاق f.

تعريف 4.1:

لنفرض أن f دالة عددية، نقول بأن f متصلة عند a بشرط أن يكون العدد a داخل نطاق f، وان لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب δ بحيث أن:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{عندما يكون} \quad |x - a| < \delta .$$

إذا كان لكل نقطة a في الفئة D تكـون f متصلة عند a، فـإننا نقـول «f متصلة على D». في حالة ما تكون f متصلة عنـد أي عدد a في نـطاقها، نقــول ببساطـة ان «f متصلة». عندمـا تكـون f غير متصلة سـواء عنـد a أو على D، فـإننـا نقـول f منفصلة discontinuous (غـير متصلة).

يصف التعريف السابق ظاهرة معروفة لدى طلبة التفـاضل والتكـامل حـول الدالـة «التي تقـترب إلى قيمتهـا المعـطاة كلما اقـتربت x من نقـطة في نـطاقهـا». إن معـظم الـدوال التي واجهناها في مبادىء التفاضل والتكامـل كانت دوال متصلة، وهـذه الدوال يكـون رسمها في غاية البساطة.

على الرغم من أن خـاصية الاتصـال (الاستمراريـة) من الخواص البـديهية التي يـواجهها الدارس في دراسة التفاضل والتكامل العادي، إلا أنها تستحق أن نتعرف عليها من جديـد، وذلك باستعمال $\delta - \varepsilon$ لتحقيق الاتصال، في بعض الأمثلة.

مثـال 4.1:

إذا كانت $f(x) = mx + b$ فإن f متصلة على $\mathbb{R}$.

لنفرض أن a أي عدد حقيقي وأن $\varepsilon > 0$.

لندرس التحليل الآتي:

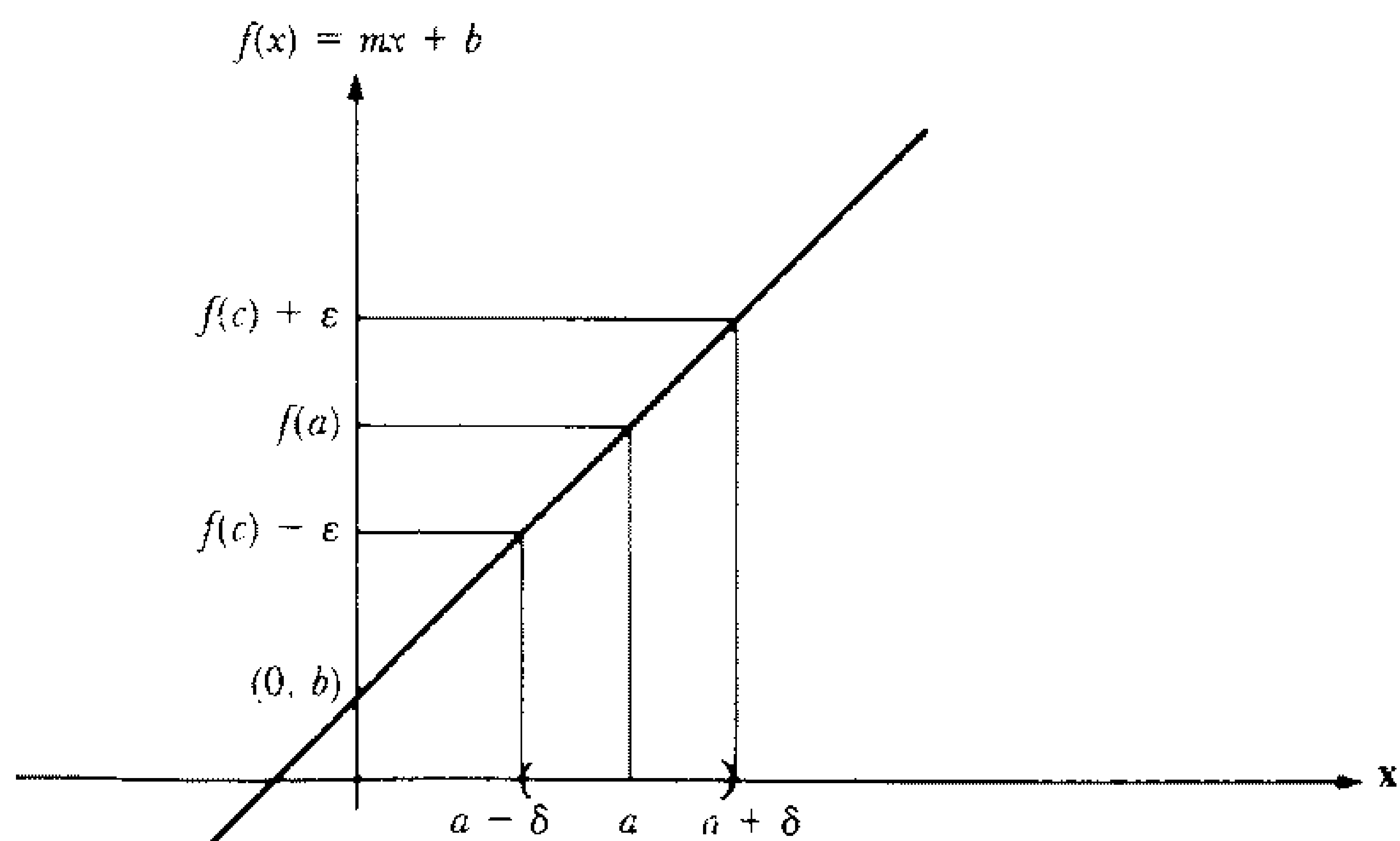
$$|f(x) - f(a)| = |(mx + b) - (ma + b)| = |m|\,|x - a|$$

إذا كان $m = 0$ فقد تم العمل؛ لأن $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ لكل x.

إذا كان $m \neq 0$ فنعرف $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$، وحيث إن $|x - a| < \delta$ فـإن ذلك يؤدي إلى:

$$|f(x) - f(a)| = |m|\,|x - a| < |m| \cdot \frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon$$

(انظر الشكل 4.1).



شكل (4.1)

مثـــال 4.2:

إذا كانت $f(x) = x^2$ فإن f متصلة . نفترض أن $\varepsilon > 0$ وأن a أي عدد حقيقي .

الآن لندرس التحليل الآتي:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x + a|\,|x - a|$$

نُعرّف $\delta = \min\left\{1 \text{،} \dfrac{\varepsilon}{(1 + 2|a|)}\right\}$.

هكذا نستنتج أنه عندما يكون $|x - a| < \delta$ يكون لدينـا $|x - a| < 1$ وبالتـالي فإن $a - 1 < x < a + 1$. يؤدي هذا إلى:

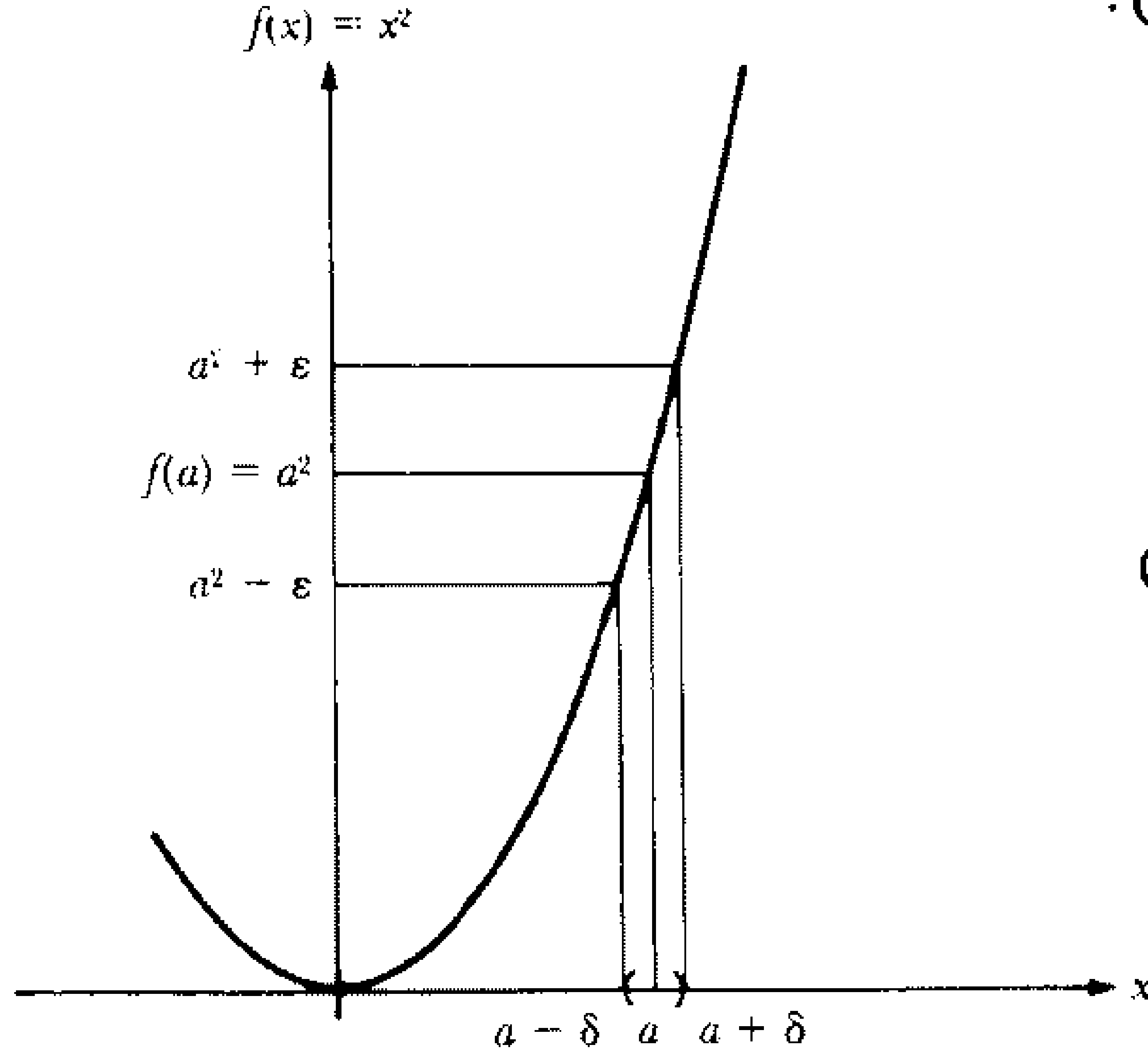
$$|x + a| \leqslant |x| + |a| < |a| + 1 + |a| = 1 + 2|a|$$

وأيضاً $|x - a| < \delta$ يؤدي إلى $|x - a| < \dfrac{\varepsilon}{(1 + 2|a|)}$ ،

وبالتالي عندما يكون $|x - a| < \delta$ يكون لدينا:

$$|f(x) - f(a)| = |x + a|\,|x - a| < (1 + 2|a|) \cdot \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|} = \varepsilon$$

(انظر الشكل 4.2).



شكل (4.2)

مثــال 4.3:

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ فإن f متصلة على $(0 ، \infty)$.

لنفرض أن $a > 0$ وكذلك $\varepsilon > 0$. لندرس الآتي:

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}|$$

$$= \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{a}|\,|\sqrt{x} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|}$$

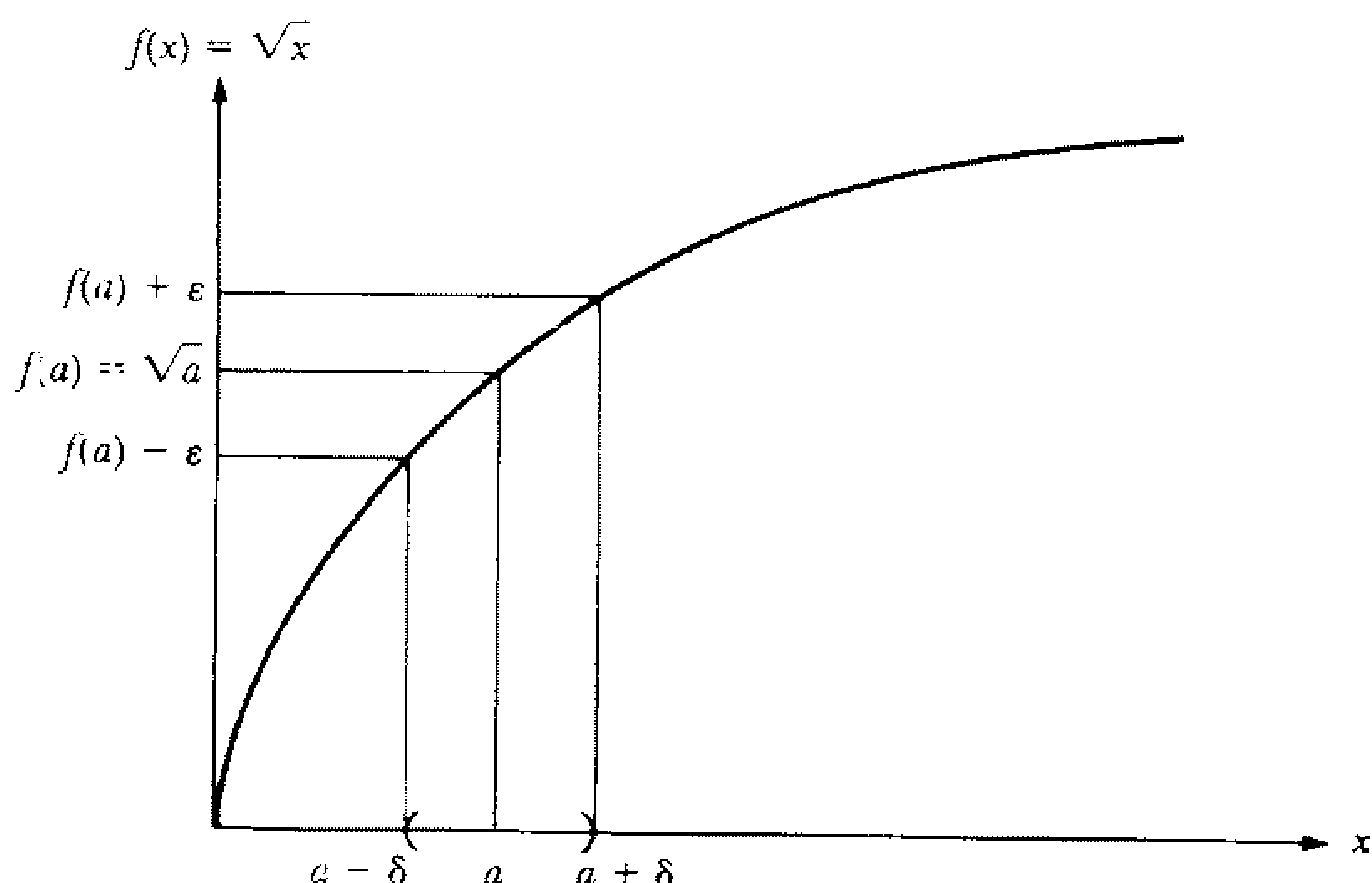
$$= \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|}|x - a|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}|x - a|$$

نُعرّف $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ وبالتالي فإنّ $|x - a| < \delta$ تؤدي إلى

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \frac{1}{\sqrt{a}}(\varepsilon\sqrt{a}) = \varepsilon$$

(انظر الشكل 4.3).



شكل (4.3)

من الواضح ان لهذه الأمثلة نمط واحد، يتم بكتابة $|f(x) - f(a)|$ على شكل عوامل، لنقل: إنّ $|f(x) - f(a)| = |g(x)|\,|x - a|$. ثم نختار δ صغيرة جداً بحيث تكون $g(x)$ محدودة، لنقل: $|g(x)| \leqslant B$ عندما يكون $|x - a| < \delta$ وفي الوقت نفسه نختار δ أصغر من $\frac{\varepsilon}{B}$. بهذه الطريقة فإن $|x - a| < \delta$ تؤدي إلى:

$$|g(x)|\,|x - a| < B\left(\frac{\varepsilon}{B}\right) = \varepsilon .$$

على الرغم من أن هذا اجراء روتيني، إلا أنها طريقة جيدة لتفهُّم هذه الفكرة، وهي: «ε معطاة، اختار δ». اذن يستحسن أن تراجع هذه الطريقة وذلك بالشغل على الدوال المشابهة في بعض التمارين.

تمارين 4.1

1 - برهن أن $f(x) = \frac{1}{x}$ متصلة عند 2.

2 - برهن أن $f(x) = \frac{1}{(3x - 2)}$ متصلة عند 1.

3 - برهن أن $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ متصلة عند 4.

4 - برهن أن $f(x) = \frac{1}{x^2}$ متصلة عند 2.

برهن أن كل دالة من الدوال الآتية متصلة.

5 - $f(x) = x^2 + x - 1$

6 - $f(x) = x^3$

7 - $f(x) = x^n$ عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً.

8 - $f(x) = \frac{1}{x}$

9 - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

10 - $f(x) = \frac{1}{x^2}$

11 - $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x < 2 \\ 2 + x & \text{if} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$

12 - $f(x) = \frac{x}{(x + 1)}$

13 - $f(x) = |x|$

14 - $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{if} \quad x < 1 \\ 2x - 1 & \text{if} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

15 - $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

4.2 المعيار المتتالي للاتصال — The Sequential Criterion for continuity

بعد التعرف على فكرة النهايات يسعى الدارس لإثبات بعض الخواص الأساسية، مثل تلك الخواص التي تحتويها النظريات من 2.1 إلى 2.4 لنهايات المتتاليات. نستطيع أن نبرهن مثل هذه النتائج وذلك بمعالجة ε ، δ كما في براهين الفصل الثاني، ولكن من الممكن

تفادي الكثير من هذه التفصيلات بواسطة إثبات نظرية واحدة تسمح لنا باستخدام نظرية نهايات المتتالية والتي درسناها سابقاً.

نظرية 4.2: المعيار المتتالي للاتصال

لنفرض أن f دالة وأن a عدد داخل نطاق f. عندها فإنّ الخاصيتين التاليتين متكافئتان:

أ - f متصلة عند a.

ب - إذا كانت s متتالية في نطاق f بحيث إن $\lim S_n = a$ ، فإن

$\lim_n f(s_n) = f(a)$.

البرهان:

لنفرض صحة (أ) ولنفرض أن $\varepsilon > 0$، ولتكن s أي متتالية في نطاق f، تحقق $\lim_n s_n = a$. باستخدام (أ)، نختار $\delta > 0$ وبالتالي فإن:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{عندما يكون} \quad |x - a| < \delta \qquad (1)$$

بما أن $\lim_n s_n = a$ ، فإننا نستطيع اختيار N بحيث $n > N$ تؤدي إلى

$|s_n - a| < \delta$ ، وانطلاقاً من (1) يؤدي ذلك إلى $|f(s_n) - f(a)| < \varepsilon$.

لهذا السبب فإن $\lim_n f(s_n) = f(a)$ وبهذا نكون قد برهنا على أن (أ) تؤدي إلى (ب).

يمكن برهان التضمين العكسي بمحاورة غير مباشرة. إذ نفترض أن (أ) غير صحيح، ونوضح أن (ب) لا بد أن يكون غير صحيح وذلك ببناء متتالية s بحيث إن

$\lim_n s_n = a$ ولكن $\lim_n f(s_n) \neq f(a)$ ؛ وبما أننا افترضنا أن f غير متصلة عند a ولهذا يكون التعريف الضمني غير صحيح مهما صغرت δ التي نختار. إذن توجد $\varepsilon^* > 0$ حيث إنه لأي δ الموجبة ولنقل إن $\delta = \frac{1}{n}$ فإن:

$|x - a| < \frac{1}{n}$ لا تؤدي إلى $|f(x) - f(a)| < \varepsilon^*$.

إذن توجد قيمة للمتغير x ولنقل: $x = s_n$ بحيث إن

$|s_n - a| < \frac{1}{n}$ ولكن:

$$f(s_n) - f(a) \geqslant \varepsilon^* \qquad (2)$$

باختيار هذه القيمة لـ s_n لكل n في $\mathbb{N}$، نكون قد عرّفنا متتالية s حيث إن

$\lim_n s_n = a$ (لأن $|s_n - a| < \frac{1}{n}$).

بينما $\lim_n f(s_n) \neq f(a)$ لأن $|f(s_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon^*$ لكل n.

لهذا السبب وضحنا أنه إذا كان (أ) غير صحيح فإن (ب) غير صحيح أيضاً وبهذا يكون البرهان قد اكتمل.

بالرغم من أن استعمال المعيار المتتالي للاتصال (من هنا فصاعداً S C C) غير ملائم لإثبات اتصال دالة معينة، إلا أنه أداة جيدة لتبيين انفصال دالة معطاة. ونُوضح ذلك في المثال التالي:

مثال 4.4:

إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if} \quad x \neq 0 \\ M & \text{if} \quad x = 0 \end{cases}$$

فإن f منفصلة عند 0 (بغض النظر عن قيمة M). نأخذ

$s_n = \frac{1}{n}$ ولهذا فإن $\lim s_n = 0$ ، ولكن،

$\lim_n f(s_n) = \lim_n = \infty$.

لهذا السبب فإن f لا تحقق (ii) من (S C C).

هذا المثال يوحي بملاحظة عامة سنبرهنها فيما بعد.

نتيجة 4.1 أ:

إذا كانت الدالة f متصلة عند a، فإنه توجد فترة مفتوحة I تحتوي a حيث تكون f محدودة على I.

البرهان:

لنفرض أن المطلوب غير صحيح، ولنفرض أيضاً أن a في نطاق f، فإن f تكون غير محدودة على أية فترة مفتوحة تحتوي a. ومن ذلك فإن لكل n، تكون f غير محدودةعلى الفترة المفتوحة

$$I_n = \left(a - \frac{1}{n} ، a + \frac{1}{n}\right)$$

بما أن العدد n لا يمكن أن يكون حداً أعلى لـ $|f(x)|$ على I_n، فإننا نستطيع أن نختار s_n في I_n، بحيث يكون

$|f(s_n)| > n$. ويحدد هذا متتالية s بحيث يكون $\lim_n s_n = a$ (لأن

$\left(|s_n - a| < \frac{1}{n}\right.$ ، ولكن $\{f(s_n)\}$

لا تتقارب؛ لأنها غير محدودة. لهذا السبب فإن f لا تحقق (ب) من S C C عند a. لذا تكون f منفصلة عند a.

نستخدم في المثال التالي S C C لبرهنة انفصال دالة محدودة.

مثال 4.5:

إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if} \quad x \neq 0, \\ M & \text{if} \quad x = 0, \end{cases}$$

فإن f تكون دالة منفصلة عند 0 (بغض النظر عن قيمة M).

نختار $s_n = \frac{1}{n\pi}$ و $t_n = \frac{1}{\left[2\,n\pi + \frac{\pi}{2}\,)\right]}$ ، وبذلك يكون

$\lim_n s_n = 0$ ، $\lim_n t_n = 0$ ، ولكن لكل n

$f\,(s_n) = \sin n\pi = 0$ و $f(t_n) = \sin\left[2\,n\pi + (\frac{\pi}{2}\,)\right] = 1$.

لهـذا السبب تكـون $\lim_n f(s_n) = 0$ بينـما $\lim_n f(t_n) = 1$. وبما أن $f(0)$ لا تسـاوي قيمة كلتـا النهايتـين، فإن احـدى المتتـاليتـين s أو t عـلى الأقـل تبيـن أن f لا تحقق (ب) من S C C.

كما في السابق فإن هذا المثال يوحي باستنتاج عام سنعرضه في النتيجة التالية. إن الـبرهان بديهي ويترك كتمرين. (تمرين 4.2.8).

نتيجة 4.1 ب:

لنفـرض أن f دالة، وأن a عـدد داخل نـطاقها. إذا وُجِـدَت متتـاليتـان t, S كـلاهمـا يتقارب إلى العدد a بحيث يكون:

$\lim_n f(s_n) \neq \lim_n f(t_n)$ ، فإن f منفصلة عند a.

هذه النتيجة تسهـل - بصورة خـاصة - الحكم عـلى ذلك الانفصـال (discontinuity) من النوع الذي يعرف بالقفزة المحدودة.

مثـال 4.6:

لتكن f «دالـة أكبر عـدد صحيح»: $f(x) = [x]$ حيـث $[x] =$ أكـبر عدد صحيـح n حيث يكون $n \leqslant x$. فإن f تكون منفصلة عند كل عدد صحيح.

لنأخذ $s_k = n - \frac{1}{k}$ ، $t_k = n + \frac{1}{k}$ ؛

من ذلك يكون $\lim_k = n = \lim_k t_k$ ولكن لكل $k > 1$،

$f(s_k) = n - 1$ ، $f(t_k) = n$.

إذاً:

$\lim_k [t_k] = n$ ، $\lim_k [s_k] = n - 1$.

وبالاستناد إلى النتيجة 4.1 ب تكون f منفصلة عند n.

4.3 تركيبات الدوال المتصلة Combination of continuous functions

حان الوقت الآن لضم S C C مع نظرية النهاية للمتتاليات التي عرضت في الفصل الثاني. النتيجة ذات صلة بنهايات التركيبات الجبرية للدوال المتصلة.

نظرية 4.2:

إذا كان كلٌّ من الدالتين f, g متصلتين عند a، فإن الدوال $f + g$ ،$f - g$ ،$f \cdot g$ متصلة عند a. علاوة على ذلك، إذا كانت $g(a) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{f}{g}$ متصلة عند a.

البرهان:

لنفرض أن s متتالية في نطاق كل من f, g بحيث يكون $\lim_n S_n = a$. فاستناداً إلى S C C يكون لدينا

$\lim_n f(s_n) = f(a)$ ، $\lim_n g(s_n) = g(a)$ ، هكذا بواسطة النظرية 2.3:

$$\text{Lim}_n \left[f(s_n) \pm g(s_n)\right] = f(a) \pm g(a)$$

وبواسطة النظرية 2.4:

$$\lim_n f(s_n)\, g(s_n) = f(a)\, g(a)$$

أيضاً، إذا كانت $g(a) \neq 0$، فبالاستناد إلى النظرية 2.4 نستنتج

$$\lim_n \frac{f(S_n)}{g(s_n)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

بما أن s متتالية عامة تتقارب إلى a، فإننا نكون قد بيَّنا أن الخاصية (ب) من S C C قد تحققت لكل دالة من الدوال

$$f + g \text{ ،} \quad f \cdot g \text{ ،} \quad \frac{f}{g} \text{ .}$$

لهذا السبب فإن كلاً من هذه الدوال متصل عند a.

في معالجتنا لخارج القسمة $\frac{f}{g}$ علقنا على نقطة صغيرة ولكنها ضرورية؛ لكي نبين أن الخاصية (ب) من S C C تتحقق في حالة $\frac{f}{g}$ ، من الضروري اعتبار فقط تلك المتتاليات في نطاق $\frac{f}{g}$ التي تقترب من a. هذا يعني أن لكل n ، $g(S_n) \neq 0$ وهذا هو المطلوب للفرض الوارد في النظرية 2.4 والذي تمّ استخدامه. الفرض بأن $g(x)$ غير صفرية لا يتعلق بالتركيبات الجبرية الثلاث الأخرى، لهذا السبب فإنه لم يُطرح إلا في نهاية البرهان. وتضمن النتيجة التالية وجود متتالية s بقيم دالية غير صفرية.

نظرية مساعدة 4.1:

إذا كانت الدالة g متصلة عند a و $g(a) > 0$ فإنه توجد فترة مفتوحة I تحتوي على a بحيث يكون $g(x) > 0$ لكل x في I.

البرهان:

لنفترض عدم صحة الاستنتاج. معنى ذلك أن كل فترة مفتوحة تحتوي على a لا بد أن تحتوي على عدد x حيث $g(x) \leqslant 0$. وعلى وجه الخصوص، لكل n، فإن الفترة

$$\left(a - \frac{1}{n} \text{ ،} a + \frac{1}{n}\right)$$

تحتوي على بعض s_n حيث $g(s_n) \leqslant 0$. إذا كانت g متصلة عند a فإن S C C تؤدي إلى أن $\lim_n g(s_n) = g(a)$ ، ولكن تمرين 2.2.3 يتضمن أن $g(a) \leqslant 0$ لهذا السبب فإنه إذا كان الاستنتاج غير صحيح، فإن الفرض لا يتحقق وهذا يُثبت النظرية المساعدة.

نظرية 4.3:

إذا كانت الدالـة f متصلة عند a، $f(a) > c$ ($f(a) < c$)، عـلى التوالي، فـإنه تـوجد فترة مفتوحة I تحوي a بحيث يكون $f(x) > c$ ($f(x) > c$)، على التوالي لكل x في I.

البرهان:

إذا حققت f فروض النظرية، فإننـا نضع $g(x) = f(x) - c$. إذن g تحقق فـروض النظرية المساعدة 4.1، وبالتالي توجد فترة مفتوحة I تكون خلالها

$0 < g(x) = f(x) - c$ ، أي أن $f(x) > c$ لكل x في I. لبرهنـة الحالـة التي تكون فيها $f(a) < c$ ، نطبق النظرية المساعدة 4.1 على الدالة $h(x) = c - f(x)$.

في برهان النظرية 4.3، افـترضنا كـما هو معـروف أن الدالـة الثابتـة $\varphi(x) = c$ متصلة (لقد تـم اثبات ذلك في المثال 4.1 في حالة $m = 0$) . لهذا السبب فإن النظرية 4.2 تؤكـد أن الـتركيب $f(x) - c$ يكـون دالـة متصلة أيضـاً، وهـذا الاتصـال للدالـــة $f(x) - c$ استعمل في برهنة النظرية 4.3.

نقـدم مناقشـة مختصرة عن الدوال الـتراكيبية (composite). وقـد عُولِـج هـذا المـوضـوع في منهج مبادىء التفاضل والتكامل، وذُكر باختصار لربطه بفكرة المتتاليات الجزئية في الفصل الثاني. بالرغم من ذلك من المفيد مراجعـة بعض الرمـوز والمصطلحـات. إذا كانت كـل من f, g دالة فإن الدالة التراكيبية من g مع f ويرمز لها بـالرمـز $g \circ f$ تتكون من الأزواج المـرتبة التالية:

$$g \circ f = \{(x, y) : (x, f(x)) \in f \text{ and } (f(x), y) \in g\}$$

ومن ذلك فإن صورة f(x) لا بد أن تكون في كل من مـدى f ونطاق g. إذا كـان (x, y) في $g \circ f$، فإننا نكتب:

$$(g \circ f)(x) = y = f\big(g(x)\big)$$

يمكن النظر إلى التراكب السابق كعملية ثنائية لدالتين دمجتا معاً للحصول على دالة أخرى. في النظرية 4.2 واجهنا عملية ثنائية على دوال عددية أعطيت على شكل تركيبات جبرية لدالتين. وفقاً لتلك النظرية فإن نتيجة التراكب الجبري أظهرت خاصية الاتصال نفسها التي كانت للدالتين الأصليتين. هذه هي طبيعة النظرية القادمة، والتي توضح لنا أن الاتصال يبقى مُحققاً تحت عملية تركيب الدوال. إن برهان هذه النتيجة يُتيح الاستخدام المباشر لتعريف الاتصال مباشرة دون الالتجاء إلى S C C.

نظرية 4.4:

إذا كانت الدالة f متصلة عند a والدالة g متصلة عند $f(a)$ فإن $g \circ f$ دالّة متصلة عند a.

البرهان:

لنفرض أن $\varepsilon > 0$. بما أن g متصلة عند $f(a)$، إذن يوجد عدد موجب وهو δ' بحيث يكون:

$$|g(z) - g(f(a))| < \varepsilon \quad \text{عندما} \quad |z - f(a)| < \delta'. \qquad (1)$$

بما أن f متصلة عند a، فإنه يوجد عدد موجب وهو δ بحيث إن:

$$|f(x) - f(a)| < \delta' \quad \text{عندما} \quad |x - a| < \delta. \qquad (2)$$

إذن عندما يكون $|x - a| < \delta$ ، فإنّ التضمين (2) يؤكّد أن $f(x)$ تحقق الشرط المطلوب لـ z في (1)، ومن ذلك:

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

إذن $|x - a| < \delta$ تؤدي إلى $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$ ، ولهذا السبب فإن $g \circ f$ متصلة عند a.

من التطبيقات المتكررة والمجدية للاتصال، تلك المتعلقة بمفهوم الاتصال إحادي الجانب. إنّ تعريف الاتصال من جانب واحد مشابه جداً لتعريف الاتصال العادي، ولكنه في هذه الحالة يركز على تلك النقاط في نطاق الدالة التي تقع على جانب واحد فقط من النقطة التي يؤكد عندها الاتصال.

تعريف 4.2:

تكون الدالة f متصلة من الجانب الأيسر (أو الأيمن) عند النقطة a بشرط أن تكون الفترة $(a - c , a]$ أو $[a , a + c)$) في نطاق الدالة f، ولكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب δ حيث يكون $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ عندما $0 \leqslant a - x < \delta$ (أو $0 \leqslant x - a < \delta$).

لاحظ أن العبارة الأخيرة من التعريف «$0 \leqslant a - x < \delta$» توضح بأن x قريب من a وأصغر من a، بينما «$0 \leqslant x - a < \delta$» توضح بأن x قريب من a وأكبر من a.

الاتصال أحادي الجانب مفيد في وصف سلوك أنواع معيّنة من الدوال التي لا تحقق الاتصال، ولكن يبقى سلوكها جيداً من جانب واحد.

مثال 4.6 أ:

الدالة $f(x) = [x]$ ($[x] =$ أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي x) متصلة من اليمين عند كل عدد صحيح، بالرغم من أننا لاحظنا في المثال 4.6 أن $[x]$ منفصلة عند كل عدد صحيح.

مثال 4.7:

الدالة $f(x) = \sqrt{2 - x}$ دالة متصلة من اليسار عند 2، ولكن لا تحقق الاتصال عند 2؛ لأن 2 ليست نقطة داخلية في نطاقها.

تمارين 4.4

1 ـ برهن أن $\frac{|x+2|}{(x-2)}$ منفصلة عند -2.

2 ـ استخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لتعميم النظرية 4.2 في حالة عدد نهائي من الحدود أو العوامل؛ أي برهن على أنه إذا كانت كل من $f_1 ، f_2 ، .... ، f_n$ دالة متصلة عند a

فإن $\sum_{i=1}^{n} f_i$ دالة متصلة عند a وكذلك $\prod_{i=1}^{n} f_i$ دالة متصلة عند a.

3 ـ برهن على أن كل دالة كثيرة حدود (Polynomial) تكون متصلة على $\mathbb{R}$.

4 ـ برهن أن:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in Q \\ 0 & \text{if} \quad x \in R \sim Q \end{cases}$$

تكون منفصلة في كل مكان.

5 ـ برهن على أن:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if} \quad x \quad Q \cap [0 ، 1] \\ 1 - x & \text{if} \quad x \quad [0 ، 1] \sim Q \end{cases}$$

تكون متصلة عند $\frac{1}{2}$ فقط.

6 ـ لنفرض أن f مُعرَّفة على $[0 ، 1]$ كالآتي:

إذا كان x عدد غير قياسي أو صفر فإن $f(x) = 0$ ، وإذا كان $x = \frac{p}{q}$ عندما يكون p، q عددين موجبين صحيحين ليس بينهما عامل مشترك (أي أن $\frac{p}{q}$ مختصر إلى أقصى ما يمكن) فإن $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$.

برهن أن f منفصلة عند كل عدد قياسي ومتصلة عند كل عدد غير قياسي في $[0 ، 1]$.

7 - استخدم النظرية 4.4 لبرهان أن الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ متصلة.

٨ - برهن النتيجة 4.1 ب.

٩ - برهن أنه إذا كانت f دالة متصلة غير سالبة، فإن $h(x) = \sqrt{f(x)}$ تكون دالة متصلة.

10 - برهن أنه إذا كانت f متصلة عند a و $\varepsilon > 0$ فإنه توجد فترة مفتوحة I تحوي a بحيث يكون لأية نقطتين $x_1 ، x_2$ في I، $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

11 - برهن أنه إذا كانت f متصلة على $[a ، b]$، فإن f محدودة هناك.

(إرشاد: استخدم النتيجة 4.1 أ ونظرية هاين - بوريل).

4.5 نهايات الدوال Function Limits

من الضروري في بعض الحالات دراسة سلوك الدالة عند نقط تكون قريبة الى نقطة معينة ليست في نطاق الدالة. على سبيل المثال فإنّ «مشتقة الدالة»، وهي النظرية الموضحة بالتفصيل في الفصل الخامس، قد بنيت على أساس هذه العلاقة. وتكمن مهمتنا الآن في وضع أساس لهذه النظرية. من الملائم في هذا الوقت أن نقدم بعض رموز ذلك النوع من الفئات الذي سيواجهنا مراراً في المناقشة التالية: إذا كان a عدداً و $\delta > 0$، لتكن $\triangle_a$ فئة معطاة على النحو الآتي:

$$\triangle_a = (a - \delta ، a) \cup (a ، a + \delta)$$

تعريف 4.3:

لنفرض أن f دالة وأن a, L عددان؛ فإن f لها نهاية L عند a بشرط أن نطاق f يحتوي على $\triangle_a$ لعدد موجب ما δ وتوجد دالة $\bar{f}$ بحيث يكون:

أ ـ $\bar{f}(x) = f(x)$ لكل x في Δ_a .

ب ـ f متصلة عند a، وكذلك

ج ـ $\bar{f}(a) = L$.

في هذه الحالة نكتب $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

وعندما يكون الحرف الذي يرمز للمتغير في نطاق الدالة f واضحاً فإن النهاية المذكورة تكتب باختصار كما يلي: $\lim_a f(x) = L$.

لكي يكون التعريف مألوفاً لدينا يجب أن ندرس بعض الاحتمالات. إذا كانت f متصلة عند a فإننا نستطيع أن نأخذ $\bar{f}$ هي نفسها f و $\lim_a f(x) = L$ تصبح عندئذٍ $\lim_a f(x) = f(a)$. وهذه هي بالفعل طريقة تعريف الاتصال عند a. ولكن مفهوم نهاية الدالة أوسع من مفهوم اتصال الدالة، لهذا السبب يُطرح السؤال الآتي: في أيّة حالة يكون فيها $\lim_a f(x) = L$ موجوداً رغم أن f منفصلة عند a؟

أبسط مثال على ذلك هو عندما تحقق f كل شروط الاتصال ما عدا أن $f(a)$ غير معرّفة، أي أن a غير موجودة في نطاق الدالة f.

نوضّح ذلك في الدالّة التالية:

مثال 4.8:

إذا كانت

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)}، \quad \text{فإن} \quad \lim f(x) = 2 \ .$$

واضح ان 1 لا ينتمي إلى نطاق f، ولكن لأية قيمة أخرى x فإن $f(x)$ تُختصر إلى $x + 1$. لهذا السبب نأخذ $\bar{f}(x) = x + 1$ والتي نعرف بأنها متصلة. (انظر تمرين 4.4.5).

إذن $\lim_1 f(x) = \bar{f}(1) = 2$.

توضيح آخر وهو وجود نهاية دالية $\bar{f}$ لدالة منفصلة يمكن أن يُعيِّن في البداية بدالة متصلة

ا ثم تُغيّر قيمة الدالة عند a من $\bar{f}(a)$ إلى عدد آخر: لنقل M. ولنسمي الدالة الجديدة
ا، ومنها فإن f منفصلة عند a لأن $M \neq \bar{f}(a)$ ولكن $\lim_a f(x) = \bar{f}(a)$.

توضح هذه الفكرة في الدوال الآتية:

مثـال 4.9:

لنفرض أن $\bar{f}(x) = x^2$ وأن:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{if} \quad x = 0 \end{cases}$$

واضح أن $\lim_0 f(x) = 0 \neq f(0)$

تبـدو الدخيلة واضحـة في المثالـين الأخيرين، فـالدالّـة $\bar{f}$ في كلتا الحـالتين متصلة تقـريباً (nearly continuous)، ونقوم ببعض الأعمال التي تبـدو غير طبيعيـة لكي نحول دون وجـود الاتصال. هذا هو بالضبط الانطباع الذي يتكوّن لدى القارىء حول نهايات الـدوال وتحدث فقط عندما تكون الدالة «متصلّة تقريباً». المصطلح «تقريباً متصلة» بحاجة إلى توضيح.

إن دراسة سريعة لتعريف نهاية الـدالة $\lim_a f(x) = L$ تبـيّن لنا أن الـدالة المعـطاة وهي f تختلف عن الـدالة المتصلة $\bar{f}$ فقط عنـد النقـطة a نفسهـا وربمـا لا يكـون هنـاك أي اختلاف أيضاً إذا كـانت f متصلة. اذن نحن على حق بـالفعل في قـولنا ان $\lim_a f(x)$ مـوجودة إذا كـانت، وإذا كان فقط من الممكن تعـريف $f(a)$ أو تعريفهـا من جـديـد لكي تصبح متصلة عند a. لهذا يمكن التفكير في هذا على أساس «إزالة الانفصال» وذلك بتعريف $f(a)$ كـما ينبغي. بالفعـل فإن هـذه الظاهـرة تسمى «الانفصال القـابل لـلإزالة removable discontinuity».

4.6 المعيار المتتالي لنهايات الدوال

The sequential criterion for function limits

كما في موضوع الاتصال فإنّنا نرغب في تأسيس ارتباط بين نهايات الدوال ونهايات المتتاليـة مما يساعد في بحث نهايات الدوال. هذا هو موضـوعنا الـلاحق. هذا هـو هدفنـا القادم. في

المناقشة التالية فإن المصطلح «f لها نهاية عند a» يعني أنه يوجد عدد L حيث للدالة f نهاية L عند a.

نظرية 4.5 المعيار المتتالي لنهايات الدوال:

لنفرض أن f متصلة بحيث يحتوي نطاقها على $\triangle_a$ لعدد a وأن $\delta > 0$ ؛ عندئذٍ فإن الجمل الآتية متكافئة:

أ - f لها نهاية عند a.

ب - إذا كانت s أي متتالية في $\triangle_a$ بحيث تكون $\lim_n s_n = a$ فإن $\{f(S_n)\}$ تقاربية.

البرهان:

أولاً لنفرض أن f لها نهاية عند a ولنقل $\lim_a f(x) = L$. لنفرض أن $\bar{f}$ هي الدالة المتصلة عند a بحيث يكون $\bar{f}(a) = L$ و $\bar{f}(x) = f(x)$ في $\triangle_a$. إذن f تحقق S C C. لندرس أي متتالية s في $\triangle_a$ بحيث يكون $\lim_n s_n = a$. استناداً للخاصية (ب) من S C C، $\lim_n f(s_n) = \lim_n \bar{f}(s_n) = L$. لهذا السبب فإن (أ) تؤدي الى (ب).

على العكس، لنفرض أن (ب) صحيح. نجزم أن هنالك عدداً وحيداً هو L حيث لكل متتالة s في $\triangle_a$ تقاربية إلى a، تكون للمتتالية $\{f(S_n)\}$ التقاربية نهاية مساوية للعدد L. إذْ إنّه إذا كانت s, t متتاليتين في $\triangle_a$، نفرض أن $\lim_n f(t_n) = L_t$، $\lim_n f(s_n) = L_s$. ندرس الآن المتتالية $u = \{s_1 ، t_1 ، s_2 ، t_2 ، \ldots\}$. واضح أن كل u_n في $\triangle_a$ وان $\lim_n u_n = a$، من (ب) نعرف أن $\{f(u_n)\}$ تقاربية. لندرس المتتاليتين الجزئيتين التاليتين للمتتالية $\{f(u_n)\}$:

$$\lim_k (u_{2k-1}) = \lim_k f(s_k) = L_s$$

و

$$\lim_k f(u_{2k}) = \lim_k f(t_k) = L_t$$

وبما أن كل المتتاليات الجزئية لمتتالية متقاربة $\{f(u_n)\}$ لا بد أن تتقارب إلى النهاية نفسها، ينتج أن $L_s = L_t$.

الآن عــرفت $\bar{f}(a)$ لتكــون قيمــة النهــايــة المشــتركــة: $\bar{f}(a) = L$ وعــرّف $\bar{f}(x) = f(x)$ عـلى $\triangle_a$. اذن (ب) تـوضـح ان f تحقق الخـاصيــة (ب) من S C C، وبالتالي فإن f متصلة عند a.

بذلك فإن f لها نهاية L عند a وهذا يوضح أن (ب) تؤدي إلى (أ).

كما في S C C فإن من الملائم اختصار المعيار المتتالي لنهـايات الـدوال وفيما بعـد سنشير إلى النظرية 4.5 بالرمز S C L.

بعد أن أدخلنا مفهوماً آخراً لنهاية الدالة، نثير السؤال نفسـه الذي وجهنـاه في النظريـات 2.2، 2.3، 2.4 والمتعلق بالتركيبـات الجبريـة للنهايـات. في الوقت الحـالي نعرف أن النتـائج السابقة يمكن أن توضع للاستعمال الجيد. لهذا السبب تركت البراهين كتمرينات.

نظرية 4.6:

إذا كان لكل من الدالتين f, g نهاية عند a، فـإنه لكـل من الدوال الآتيـة f + g، f − g، f · g نهاية عند a؛ وفي هذه الحالة يكون:

$$\lim_a (f \pm g) = \lim_a f(x) \pm \lim_a g(x)$$

و

$$\lim_a (f\,g) \times = \left[\lim_a f(x)\right]\left[\lim_a g(x)\right]$$

علاوة على ذلك نقول: إذا كان $\lim_a g(x) \neq 0$، فإن $\frac{f}{g}$ ذات نهاية عند a و

$$\lim_a \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_a f(x)}{\lim_a g(x)}$$

البرهان:

انظر التمرينات 4.6.4، 4.6.5، 4.6.6.

في مناقشتنا للنهايات الدالية تعمدنا تجنب التعـريـف المعتاد $\delta - \varepsilon$. مـع ذلك فـإن من المهم أن نبين تكافؤ التعريف المعتاد للنهاية الدالية مع التعريف الـذي استخدمنـاه هنا. هـذا هو محتوى النتيجة التالية.

نظرية 4.7:

إذا كانت f دالة و a, L عددين، فإن الجملتين الآتيتين متكافئتان:

أ - $\lim_a f(x) = L$.

ب - إذا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد δ بحيث انه إذا كان:

$0 < |x - a| < \delta$ فإن x في نطاق f ، $|f(x) - L| < \varepsilon$.

البرهان:

أولاً نفترض (أ) ولنفرض أن $\bar{f}$ دالة متصلة عند a مع $\bar{f}(a) = L$ و $\bar{f}(x) = f(x)$ خلال $\Delta_a^c = (a - c ، a) \cup (a ، a + c)$. إذا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد موجب $\delta < c$ بحيث إن:

$|\bar{f}(x) - \bar{f}(a)| = |\bar{f}(x) - L| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - a| < \delta$. (1)

باستبعاد $x = a$ في (1)، نستطيع أن نضع $\bar{f}$ بدلاً من f، والذي يعطينا:

$|f(x) - L| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - a| < \delta$.

هذا يُثبت أن (أ) تتضمّن (ب).

على العكس من ذلك، نفترض أن (ب) تصح. نُعرِّف $\bar{f}(x) = f(x)$ لكل $x \neq a$ و $\bar{f}(x) = L$. بالتالي فإنه من الواضح أن f تحقق التعريف 4.1 وبذلك يكون $\lim_a f(x) = L$.

4.7 النهايات المختلفة للدوال Variations of function limits

توجد عدة أنواع مشتركة للنهايات الدالية. على سبيل المثال فإننا نستطيع تعريف «نهاية f(x) عندما x تؤول إلى ما لا نهاية»، ويرمز لها بالرمز $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$، كالآتي:

إذا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد N بحيث إن $x > N$ يؤدي إلى $|f(x) - L| < \varepsilon$.

هذا هو النظير الصحيح لنهاية المتتالية؛ إذ إننا غيّرنا $f(x)$، x بدلاً من s_n , n على التوالي. النتيجة الصحيحة لهذا التغيير الرمزي هي استبدال نطاق المتتالية $\mathbb{N}$ بنطاق الدالة الذي يكون على شكل $(\infty ، a)$. عندما يكون $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ، فإن الخط $y = L$ هو خط التقارب الأفقي Horizontal asymptote ـ لمنحني الدالة f. يمكن تعريف $\lim_{x\to\infty} f(x)$ بالأسلوب نفسه.

هنالك نوع آخر مألوف من أنواع نهايات الدوال هو (النهاية من جانب واحد one-sided limit). يمكن تعريف ذلك بالقول بأن للدالة f نهاية من الجانب الأيسر عند a تساوي L بشرط أن يحوي نطاق f فترة مفتوحة $(a - \delta ، a)$ وتوجد دالة $\bar{f}$ متصلة من اليسار عند a حيث يكون $\bar{f}(x) = f(a)$ على $(a - \delta ، a)$، $\bar{f}(a) = L$.

ويرمز لذلك باحدى الطريقتين:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$

$$\lim_{a^-} f(x) = L,$$

أو ببساطة

$$.f(a-) = L$$

بالطريقة نفسها نعرف النهاية من الجانب الأيمن عند a، والتي يرمز لها باحدى الطريقتين:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \quad ، \quad \lim_{a^+} f(x) = L \quad \text{أو} \quad f(a+) = L.$$

تصح نتائج النظرية 4.6 عن التركيبات الجبرية على النهايات من جانب واحد وعلى النهايات عندما تؤول x إلى ما لا نهاية. برهان النظرية 4.6 في حالة النهاية من جانب واحد قريب جداً من برهان النظرية 4.6. وعندما تؤول x إلى ما لا نهاية، فإن البرهان مشابه لبراهين النظريات 2.3، 2.4. التفصيلات مطلوبة في التمرينات 4.7.7، 4.7.8.

تمارين 4.7

1 ـ برهن أنه إذا كانت $f(x) = \dfrac{(x^3 - 8)}{(x - 2)}$، فإن f لها نهاية عند 2.

2 ـ برهن أنه إذا كانت $f(x) = \frac{(x^2 + x - 2)}{(x^2 - 4)}$، فإن f لها نهاية عند -2.

3 ـ برهن أنه إذا كانت $f(x) = \frac{(x^n - a^2)}{(x - a)}$، فإن f لها نهاية عند a.
(إرشاد: n عدد صحيح موجب).

4 ـ برهن أنه إذا كان لكل من الدالتين f و g لها نهاية عند a فإن:

$$\lim_a \pm (f + g)(x) = \lim_a f(x) \pm \lim_a g(x)$$

5 ـ برهن أنه إذا كان لكل من الدالتين f و g لها نهاية عند a، فإن:

$$\lim_a (fg)(x) = \left[\lim_a f(x)\right]\left[\lim_a g(x)\right]$$

6 ـ برهن أنه كان لكل من الدالتين f و g لها نهاية عند a و $\lim_a g(x) \neq 0$، فإن:

$$\lim_a \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_a f(x)}{\lim_a g(x)}$$

7 ـ أعرض وبرهن نظيراً للنظرية 4.6 في حالة النهايات من جانب واحد.

8 ـ أعرض وبرهن نظيرا للنظرية 4.6 في حالة النهايات عندما x يؤول إلى ما لا نهاية.

9 ـ برهن أن $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

10 ـ برهن أنه إذا كان $a_n \neq 0$ ، $b_n \neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_n}$$

11 ـ برهن أنه إذا كانت f غير تناقصية على $\mathbb{R}$، فإن لكل a في $\mathbb{R}$، تكون $f(a-)$ موجودة.

12 ـ برهن أنه إذا كانت f مطردة (تناقصية أو تزايدية) على $\mathbb{R}$، فإن لكل a في R وتكون $f(a-)$، $f(a+)$ كلاهما موجودة.

13 ـ برهن معيار كوشي للنهايات عندما $x \to \infty$: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ إذا كان وإذا كان فقط لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد B بحيث إن $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ، كلما يكون $x > B$ ، $y > B$

عرف $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ كما يلي:

إذا كان B عدد، فإنه يوجد عدد موجب δ بحيث إن $(a, a + \delta)$ في نطاق f و $f(x) > B$ كلما كان $0 < x - a < \delta$.

14 ـ برهن أن:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x - 3} = \infty.$$

15 ـ برهن أنه:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x^2 - 1} = \infty.$$

16 ـ برهن أنه إذا كانت $f(x) > 0$ لكل x، فإن $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ إذا كان وإذا كان فقط

$$\lim_{x \to a^+} \left[\frac{1}{f(x)} \right] = 0.$$

الفصل الخامس

5

نتائج الاتصال

(Consequences of Continuity)

5.1 مدى الدالة المتصلة

(The range of Continuous function)

في هذا الباب نستنتج خواص الدوال المتصلة على فترة تكون عادةً مغلقة. وهذه النظريات تعتمد اعتماداً وثيقاً على خاصية كمال R وذلك من خلال نظريات الباب الثالث. في النظرية الأولى نؤكد على محدودية الدالة التي تعني أن مداها فئة محدودة. وعلى وجه الخصوص فإن الدالة f محدودة على الفئة D إذا وجد ذلك العدد B بحيث يكون $|f(x)| \leqslant B$ لكل x في D.

نظرية 5.1:

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنها محدودة عليها.

البرهان:

نفرض أن f ليست محدودة على $[a,b]$. نبيِّن أن f ليست متصلة على $[a, b]$، وحيث إنه لا يوجد عدد موجب يمكن أن يكون حداً أعلى لمدى f، فإنه يمكننا أن نختار لكل n عدداً s_n في $[a, b]$ بحيث إن $|f(s_n)| > n$. عندئذ فإن s متتالية محدودة لأن $a \leqslant s_n \leqslant b$ لكل n. ووفقاً لنظرية بولتزانو - ڤيرشتراس (نظرية 3.1) فإنه يكون لـ s متتالية جزئية تقاربية، ولنقل $\lim_n s_{k(n)} = c$. وكذلك وفقاً للمفترض 2.2 ينتج أن c في $[a, b]$. ولكن لكل n يكون $|f(s_{k(n)})| > k(n)$، ولذلك فإن

$\{(s_{k(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ غير محدودة، وبالتالي فهي غير متقاربة، وبالتـالي ووفقاً للمعيـار المتتالي لـلاتصال SSC (نـظرية 4.1) تكـون f غـير متصلة عـلى c، وبـالتـالي فهي غـير متصلة عـلى $[a, b]$.

ومن الضروري في النظرية 5.1 الافتراض أن الفترة محـل الدراسـة هي فترة مغلقة، والا فإن الاستدلال (التضمين) قد يكون (أو ربما يكون) غير صحيح. ندرس المثال التالي:

مثـال 5.1:

نعرف $f(x) = \dfrac{1}{x}$ على $(0, 1]$.

وفقاً للنظرية 4.2 تكون f متصلة في كل مكان فيما عدا الصفر، وبالتالي فإن f متصلة عـلى $(0, 1]$ ولكن $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = n$ ، ولهذا فمن الواضح أن f ليست محدودة على $(0, 1]$.

وسنبيِّن في النظرية القادمة أنه إذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة فإن مداها لا يكـون محدوداً فحسب، وإنما سيحتوي فعلياً على أصغر حد أعلى وأكبر حد أسفل. ومرة أخرى من الضروري افتراض أن الفترة مغلقة. فعلى سبيل المثال تكون الدالة المحايدة $f(x) = x$ متصلة على $(0, 1)$ ولكن مداها $(0,1)$ ومن الواضح أنه لا يحتوي على أصغر حد أعـلى لها أو على أكبر حد أسفل.

نظرية 5.2:

إذا كـانت f دالة متصلة عـلى الفترة المغلقـة $[a, b]$ فـإنـه يوجـد العددان c, d في $[a, b]$ بحيث يكون $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$ لكل x في $[a, b]$، أي أن:

$$f(c) = \min\left\{f(x) \;:\; x \in [a, b]\right\}$$

و

$$f(d) = \max\left\{f(x) \;:\; x \in [a, b]\right\}.$$

البرهان:

حيث إن f متصلة عـلى $[a, b]$ فإنـه وفقـاً للـنظريـة 5.1 تكـون f محـدودة في هـذه الفـترة المغـلقـة. ووفـقـاً لمسـلمـة أصـغـر حـد أعـلى (LUB) يمـكـنـنـا أن نـعـرف $M = \text{lub}\left\{f(x) : x \in [a, b]\right\}$. ويجب أن نبـين أن هنـاك عـدداً d في $[a, b]$

حيث يكون $f(d) = M$. ولكل عدد صحيح موجب n فإن $M - \frac{1}{n}$ لا يمكن أن يشكّل حداً أعلى لمدى f، ولذا يمكننا أن نختار s_n في $[a, b]$ يحقق المتباينة:

$$M - \frac{1}{n} < f(s_n) \leqslant M$$

وحيث إن $a \leqslant s_n \leqslant b$ فإن نظرية بولتزانو - فيرشتراس تضمن وجود متتالية جزئية متقاربية، لنقل $\lim_n s_{k(n)} = d$ ويؤكد لنا المفترض 2.2 ان d في $[a, b]$. والآن فلكل عدد صحيح موجب n لدينا:

$$\left[\frac{M-1}{k(n)}\right] < f(S_{k(n)}) \leqslant M ;$$

وهكذا فإن $\lim_n f(s_{k(n)}) = M$. ولكن $\lim_n s_{k(n)} = d$ أيضاً، و f متصلة عند d؛ ولذا وفقاً للمعيار التتابعي للاتصال (SCC) يكون $\lim_n f(s_{k(n)}) = f(d)$. وبذلك ووفقاً لوحدانية نهاية المتتالية (نظرية 2.2) تكون $f(d) = M$. واثبات أن $\text{glb}\,\{f(x) : x \in [a, b]\}$ في مدى f يمكن إجراؤه بطريقة مماثلة (انظر تمرين 5.1.1).

تمارين 5.1

1 - اكتب بالتفصيل باقي برهان النظرية 5.2: إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ اثبت أنه يوجد عدد c في $[a, b]$ بحيث يكون $f(x) \geqslant f(c)$ لكل x في $[a, b]$.

2 - أعط مثالاً يبين أن القيمتين العظمى والصغرى للدالة f(x) المضمونتين بنظرية 5.2 يمكن أن تتحققا في أكثر من نقطة واحدة في $[a, b]$.

3 - أعْطِ مثالاً لدالة (أو بيِّن أنها لا يمكن أن توجد) محدودة وأحادية على $[0, 1]$ ولكنها غير متصلة هناك.

5 - أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{(x^3 - 5x + 3)}{(x^2 - 4)}$ تصل إلى قيمتيها العظمى والصغرى على $[-1 ، 1]$.

5 - أثبت أن الدالة $f(x) = x^4 - 2x^3 + x + 5$ تصل إلى قيمتها الصغرى على الفترة $\mathbb{R}$ (ارشاد: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$).

6 ـ أثبت أنه إذا كانت p كثيرة حدود من درجة زوجية وكان معامل الحد ذي أعلى درجة موجباً فإن P تصل إلى قيمتها الصغرى على $\mathbb{R}$. (ارشاد: انظر تمرين 5).

5.2 خاصية القيمة الوسطى (The Intermediate Value Property)

نثبت في النظرية التالية خاصية للدوال المتصلة توضح ـ ربما أفضل من أية خاصية أخرى ـ سبب اختيارنا لكلمة متصلة في توصيف هذه الدوال. عندما نتحدّث لطالب مبتدىء عن الاتصال في حساب التفاضل والتكامل فإننا عادة نلجأ إلى الوصف البياني: فمنحني الدالة المتصلة يمكن رسمه بواسطة منحني متصل دون رفع القلم أو الطبشورة. وبذلك لا يحتوي مثل هذا المنحني على «ثقوب» أو «قفزات» أو «أجزاء محذوفة». ونعبر عن هذه الخاصية بدقة كما يلي: إذا كان μ أي عدد يقع بين عددين في مدى f، فإن μ نفسه يجب أن يكون في مدى f. ويسمى مثل هذا العدد μ بالقيمة الوسطى، كما يقال عن الدالة التي يحتوي مداها على كل القيم الوسطى: انها تتميز بخاصية القيمة الوسطى. وتنص النظرية التالية على أن الدوال المتصلة على فترة يكون لها هذه الخاصية.

نظرية 5.3 نظرية القيمة الوسطى:

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ حيث $f(a) \neq f(b)$ وكان μ عدداً بين $f(a)$، $f(b)$ فإنه يوجد ذلك العدد c في (a, b) بحيث يكون $f(c) = \mu$.

البرهان:

يمكننا ـ دون الإخلال بالعمومية ـ الافتراض أن $f(a) < \mu < f(b)$. نفرض أن S هي الفئة المعرّفة كما يلي: $S = \{x \in [a, b] : f(x) < \mu\}$. عندئذ فإن a في S ولذا فإن S ليست خالية ومحدودة من أعلى بالعدد b. نعرّف $c = \text{lub } S$. ونؤكد أن $f(x) = \mu$ ثم نثبت ذلك بتبيان أن $f(c) < \mu$، $f(c) > \mu$ يؤديان إلى تناقض.
في البداية نفرض أن $f(x) < \mu$. بالاستناد للمفترض 4.2 توجد فترة $(c - \delta، c + \delta)$ تكون $f(x) < \mu$ في كل مكان داخلها. عندئذ $f\left(c + \frac{\delta}{2}\right) < \mu$، ولذا فإن $c + \frac{\delta}{2}$ موجود في S، ولكن

$c + \frac{8}{2} > c$ مما يتناقض مع اختيار c كحد أعلى للفئة S. والآن نفترض أن $f(c) > \mu$. ومرة أخرى ينص المفترض 4.2 على وجود فترة $(c - d ، c + d)$ بحيث إن $f(x) > \mu$ في كل مكان داخلها. عندئذ فإن $x > c - d$ تؤدي إلى $f(x) > \mu$ التي تخبرنا بأن أي x أكبر من $c - d$ لن يكون في S. وبذلك فإن $c - d$ هو حد أعلى للفئة S مما يتناقض مع اختيار c بوصفه أصغر حد أعلى للفئة S. وحيث إن f معرّفة عند c ولا تحقق أياً من $f(c) < \mu$ و $f(c) > \mu$ فإننا نستنتج أن $f(c) = \mu$.

لكي نقدر العمومية التامة لنظرية القيمة الوسطى يجب إدراك أنه إذا كانت f متصلة على أية فترة (مفتوحة، مغلقة أو نصف مفتوحة) فإنه يمكننا اختيار أية نقطتين في الفترة لتقوما بدور a, b في النظرية 5.3. وبذلك تكون $[a, b]$ محتواة في الفترة الأصلية، وبالتالي فإن f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$. وبذلك يمكننا أن نستنتج أن لأية نقطتين a, b في فترة تكون عليها f متصلة فإن مدى f يحوي كل قيمة وسطى بين $f(a) ، f(b)$.

وكما في كل الحالات تقريباً عندما نثبت تضميناً مثل ذلك الذي تنص عليه النظرية 5.3 يجب أن نتساءل هل يتحقق التضمين المعكوس (عكس النظرية) أي إذا كانت للدالة f خاصية القيمة الوسطى فهل من الضروري أن تكون متصلة؟ والإجابة هي لا، كما يتضح من المثال المضاد (countere example) التالي.

مثال 5.2:

نعرف $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ إذا كانت $x \neq 0$ و $f(0) = 0$. عندئذ فإن f ليست متصلة عند الصفر لأن $\lim_0 f(x)$ غير موجود (مثال 4.5). ولكن مع تذبذب f (oscillations) حول الصفر، نرى أن كل قيمة في مدى f (وهو $[-1 ، 1]$) ستتحقق (أي ستأخذها الدالة f) في أي فترة $[0 ، \varepsilon]$ مهما كان ε صغيراً.

ويمكن توحيد النظريات 5.3، 5.2، 5.1 في منطوق واحد يقدم آفاقاً جديدة للخواص التي نص عليها.

نتيجة 5.3:

إذا كانت f متصلة على نطاق هو عبارة عن فترة مغلقة فإن مداها يكون أيضاً فترة مغلقة.

في بعض مناهج الجبر الأولى يتم إثبات أن $\sqrt{2}$ ليس عدداً قياسياً (منطقاً). ويتمّ

التوصل إلى ذلك بتوضيح أن الافتراض $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ حيث n, m في $\mathbb{N}$ يؤدي إلى تناقض. وبما أنه لا يتم التركيز عادة في منهج أولي على ذلك فإن الإثبات لا يبين أنه يوجد عدد حقيقي مربعه يساوي 2؛ فيتم أساساً اثبات أن $\mathbb{Q}$ لا تحتوي على مثل هذا العدد. وبمساعدة نظرية القيمة الوسطى يمكننا أن نثبت أن $\mathbb{R}$ تحتوي على مثل هذا العدد. وهنا سنثبت أن $\mathbb{R}$ تحتوي على جذور موجبة وحيدة من أية رتبة.

نظرية 5.4:

إذا كان $a > 0$، و n في $\mathbb{N}$ فإنه يوجد عدد موجب وحيد c بحيث يكون $c^n = a$ أي أنّ: $c = \sqrt[n]{a}$.

البرهان:

ندرس الدالة f المعرّفة بالعلاقة $f(x) = x^n$. عندئذ فإن f تكون متصلة على $[0, 1 + a]$؛ وأيضاً $f(0) = 0$، وكذلك

$$f(1 + a) = (1 + a)^n = 1 + na + \ldots + a^n > a$$

ووفقاً لنظرية القيمة الوسطى، فإن هناك عدد c في $(0 ، a + 1)$ بحيث يكون $f(c) = a$، أي أن $c^n = a$. ولكي نبين أن c هو العدد الموجب الوحيد الذي يحقق هذه المتساوية نفرض أن $b > 0$ وأن $b^n = a$، عندئذ فإن $b^n = c^n$، وبذلك فإن:

$$0 = b^n - c^n$$

$$= (b - c)(b^{n-1} + b^{n-2}c + \ldots + bc^{n-2} + c^{n-1})$$

حيث لا يمكن للعامل الثاني أن يساوي صفراً؛ لأن $b > 0$ ، $c > 0$؛ وبذلك يكون $b = c$.

تمارين 5.2

1 ـ أثبت أن للمعادلة $2x^4 - x^3 + x^2 - 1 = 0$ حلاً في $(0, 1)$.

٢ - أثبت أن F المعطاة بالصيغة $F(x) = x^3 + 2x + 7$ لها صفر حقيقي («صفر» الدالة f هو العدد z بحيث تكون $f(z) = 0$).

٣ - أثبت أنه إذا كانت p كثيرة الحدود من درجة فردية فإن لها صفر (جذر) حقيقي (ارشاد: قارن بالتمرين 5.1.5).

٤ - نفرض أن f دالة متصلة على $[a, b]$ وأن $[c, d] \subseteq [a, b]$. أثبت أنه يوجد عدد μ في $[a, b]$ بحيث تكون:

$$f(\mu) = \frac{f(c) + f(d)}{2}.$$

٥ - أثبت نظرية النقطة المثبتة «Fixed-Point Theorem»: إذا كانت f متصلة على $[0, 1]$ وكان مداها $[0, 1]$ أيضاً عندئذ توجد «نقطة مثبتة» c في $[0, 1]$ بحيث يكون $f(c) = c$ (ارشاد: ادرس $g(x) = f(x) - x$).

٦ - أثبت أنه: إذا كان كل من f, g متصلة على $[a, b]$ وكان $f(r) = g(r)$ لكل عدد قياسي r في $[a, b]$ فإن $f(x) = g(x)$ لكل x في $[a, b]$.

5.3 الاتصال المنتظم (Uniform continuity)

يسمى مفهوم الاتصال الذي درسناه حتى الآن بالاتصال النقطي (Pointwise continuity). وتستخدم كلمة النقطي للتأكيد على حقيقة أن اتصال الدالة يعتمد بشكل ملازم على نقطة خاصة في النطاق: $\lim_a f(x) = f(a)$. وهذا الاعتماد يمكن توضيحه بواسطة فحص مدقق بالتحقق بدلتا ـ ابسيلون ε من الاتصال في الأمثلة التالية.

مثال 5.3:

إذا كانت $f(x) = x^2$ فإنه يمكن تبيان اتصالها عند a بالتحليل:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x + a|\,|x - a|\,;$$

عندئذ فلأي عدد مُعطى $\varepsilon > 0$ نعرّف $\delta = \min\{1 \text{ ، } \varepsilon/(1+|a|)\}$ ، وبهذا الاختيار للعدد δ من السهل أن نرى أن $|x-a| < \delta$ تؤدي إلى $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

ولكن التفصيل الهام هنا هو أن اختيار δ يعتمد على a ، ε على السواء. والآن لنفرض أن نطاق f قد قيد بفترة ما ولتكن مثلاً $[-5 \text{ ، } 5]$. عندئذ فلأي a في نطاق f، $|a| \leqslant 5$. الآن يمكن تغيير اختيار δ إلى $\delta = \min\left\{1 \text{ ، } \frac{\varepsilon}{6}\right\}$. في هذه الحالة تعتمد δ على ε فقط بصرف النظر عن النقطة المنتمية إلى النطاق التي نتحقق من اتصال الدالة عندها.

مثال 5.4:

نفرض أن $f(x) = \frac{1}{x}$، كالمعتاد نبدأ بتحليل:

$$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|xa|}.$$

ولأي عدد معطى $\varepsilon > 0$ نعرّف $\delta = \min\left\{\frac{|a|}{2} \text{ ، } \frac{\varepsilon a^2}{2}\right\}$.

عندئذ $|x-a| < \delta$ يؤدي إلى $|x| > \frac{|a|}{2}$ وبذلك:

$$\frac{|x-a|}{|x_a|} < \frac{\frac{\varepsilon a^2}{2}}{|a/2|\,|a|} = \varepsilon$$

مرة أخرى نرى أن تعريف δ يعتمد على a و ε على السواء. وقد يمكننا وصف هذا الوضع إذا لاحظنا أنه لكي نضمن أن يكون $\frac{|x-a|}{|xa|}$ ، صغير فإنه من الضروري أولاً أن نحدد $|xa|$ لتكون بعيدة عن الصفر. ونتوصل إلى ذلك بأن نطلب أن تكون $\delta \leqslant \frac{|a|}{2}$ عندئذ فإن $|x-a| < \delta$ تؤدي إلى أن تكون x بين $\frac{a}{2}$ ، $\frac{3a}{2}$. والآن نفرض أن نطاق f مقيد بالفترة $[1 \text{ ، } \infty)$ وبذلك فإن كل النقط في نطاق f تبعد على الأقل بوحدة واحدة عن الصفر. عندئذ يكون

$\frac{|x-a|}{|xa|} < |x-a|$ لأن $|xa| \geqslant 1$. وهكذا يمكننا اختيار $\delta = \varepsilon$ حيث من الواضح أن $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$ طالما كان $|x-a| < \delta$.

ويكفل لنا التعريف العادي للاتصال اختيار δ في نقطة بعد نقطة، باستخدام خيارات مختلفة لـ δ في نقط مختلفة من نطاق f. وهنا يكمن الدافع لطرح المفهوم اللاحق أدناه، فضلاً عن تسميته.

تعريف 5.1:

تسمى الدالة f متصلة بانتظام (uniformly) على الفئة D إذا كان لأي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد موجب δ بحيث يكون لأي x_1 ، x_2 في D:

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \text{تتضمن} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

وفي مثال 5.4 و 5.3 أثبتنا أن $f(x) = x^2$ متصلة بانتظام على $[-5 ، 5]$ وان $f(x) = \frac{1}{x}$ متصلة بانتظام على $[1 ، \infty)$. وفي الحالتين فإن دوري x_1, x_2 في تعريف الاتصال بانتظام كان يقوم بهما x, a على الترتيب. وهنا مثال آخر بسيط للغاية ولكنه يوضح بجلاء الانتظام المطلوب في اختيار δ.

مثال 5.5:

إذا كان $f(x) = mx + b$ و $\varepsilon > 0$. نُعرِّف $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ ؛ عندئذ فإن $|x_1 - x_2| < \delta$ يؤدي إلى:

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= |(mx_1 + b) - (mx_2 + b)| \\
&= |m(x_1 - x_2)| \\
&< |m|\left(\frac{\varepsilon}{|m|}\right) = \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن f متصلة بانتظام على R.

لاحظ أن الاتصال المنتظم على أية فئة D ينتج منه الاتصال المنتظم على أية فئة جزئية من D.

وهذه نتيجة مباشرة من التعريف. وكما سترى فيما بعد ينبغي أخذ الحذر إذا ما حاولنا تكبير النطاق الذي تكون فيه الدالة متصلة بانتظام.

مثـال 5.6:

إذا كانت $f(x) = \frac{|x|}{x}$ فإن f متصلة بانتظام على كل من الفئتين $(0 ، \infty)$ و $(-\infty ، 0)$ ولكن f ليست متصلة بانتظام على اتحاد الفئتين لأنه لأي δ يكون الفرق بين العددين

$$x_1 = \frac{\delta}{4} ، \quad x_2 = -\frac{\delta}{4}$$ مساوياً $\frac{\delta}{2}$ ، مع ذلك

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 2.$$

قدمنا مفهوم الاتصال المنتظم بوصفه حالة أو نوعاً خاصاً ـ أقوى ـ من الاتصال النقطي. وهذا التناول، إنما يقترح انه لكي تكون الدالة متصلة بانتظام على فئة ما فإن هذه الدالة يجب أن تكون متصلة (نقطياً) عند كل نقطة من هذه الفئة. ويقدم الافتراض التالي النص الشكلي لهذا الموضوع.

مفترض 5.1:

إذا كانت الدالة f متصلة بانتظام على الفئة D، وكانت a نقطة منتمية إلى D فإن f متصلة عند a.

البرهان:

لا يوجد تقريباً ما نثبته. نكتفي ببساطة بكتابة تعريف الاتصال المنتظم باستبدال x_1 بـ x، x_2 بـ a:

إذا كان $\varepsilon > 0$ يوجد عدد موجب δ بحيث إنه لأي x في D يؤدي

$$|x - a| < \delta \quad \text{إلى} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (1)$$

ومن هنا ووفقاً للتعريف تكون f متصلة عند a.

في البرهان السابق أغفلنا نقطة صغيرة، هي افتراضنا في تعريف $\lim_a f(x)$ أن تكون النقطة a هي نقطة داخلية في نطاق f. والآن نقول فقط ان a يجب أن تكون في نطاق I. ومع ذلك فهذه ليست مشكلة جدية، لأنه يمكننا الاتفاق على أن التضمين (1) الذي يكوّن الفكرة الرئيسية للاتصال عند a يتطلب فقط كي يكون صحيحاً أن تكون x في نطاق I، أي فقط لقيم x التي تكون عندها f(x) ذات معنى. وهذه هي الصورة الأخرى لتعريف النهاية والتي استخدمت فيما سبق عند مناقشتنا المختصرة للنهايات من ناحية واحدة والاتصال من ناحية واحدة.

وعلى الرغم من أن المفترض 5.1 يبني العلاقة بين الاتصال المنتظم والنقطي، فإنه يطرح سؤالاً أكثر عمقاً: هل الاتصال المنتظم هو خاصية أقوى من الاتصال النقطي؟ أم أن كلاً منهما ينتج من الآخر؟. ولكي نجيب عن هذا السؤال يجب علينا أن ننظر نظرة أكثر قرب لما نعنيه بفشل الدالة في أن تكون متصلة بانتظام في فئة D. يجب أن ندرك أننا في مناقشة المثالين $f(x) = \frac{1}{x}$، $f(x) = x^2$ لم نبين أنهما غير متصلتين بانتظام على $R - \{0\}$، R على الترتيب. لقد استعرضنا فقط أن اختيارنا لـ δ كان معتمداً على النقطة a. وهذا ليس مكافئاً للطريقة التي تبين أنه لا يمكن تعريف δ مستقلة عن a. لقد فشلنا حتى الآن في اثبات أن هاتين الدالتين متصلتان بانتظام على نطاقيهما، وفشلنا في اثبات شيء ما لا يعني أنه غير صحيح أو خطأ. ولكي نتدبر هذا الأمر نعطى أولاً منطوقاً دقيقاً لنفي (negation) الاتصال المنتظم.

تعريف 5.2:

لا تكون الدالة f متصلة بانتظام على الفئة D إذا وجد عدد موجب ε^* بحيث إنه لأي عدد موجب δ يوجد عددان x_1, x_2 في D يحققان:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon^* \quad ، \quad |x_1 - x_2| < \delta$$

مثال (أ) 5.3:

لكي نبين أن $f(x) = x^2$ ليست متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$ نستخدم $\varepsilon^* = 1$ كما يلي: لأي عدد δ موجب نأخذ العددين

$x_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ ، $x_1 = \frac{1}{\delta}$. عندئذ $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2}$ ولكن:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 + x_2|\,|x_1 - x_2|$$
$$= \left|\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right|\left|\frac{\delta}{2}\right| > 1.$$

وبذلك فإن f ليست متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

مثـــال (أ) 5.4:

لكي نبين أن $f(x) = \frac{1}{x}$ ليست متصلة بانتظام على $(0, 1]$ نستخدم $\varepsilon^* = \frac{1}{2}$. إذا أعطى أن $0 < \delta < 1$ نأخذ $x_1 = \sqrt{\delta}$

و

$x_2 = \sqrt{\delta} - \frac{\delta}{2}$ لاحظ أنه بما أن $\delta \leqslant \sqrt{\delta}$ يكون:

$0 < x_2 < x_1 \leqslant 1$. عندئذ $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$ ولكن:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1\, x_2|}$$
$$> \frac{\frac{\delta}{2}}{\sqrt{\delta}\,\sqrt{\delta}}$$
$$= \frac{1}{2}$$

وبذلك فإن f ليست متصلة بانتظام على $[0, 1]$.

وهنـاك بعض الحـالات يؤدي فيهـا الاتصـال عنـد كـل نقـطة من نقط فئة مـا D إلى الاتصال المنتظم على D. والنظرية التالية تعطي مثل هذا الشرط وهي النتيجة الأهم في هذا الباب. ويلاحظ عمق المنطوق من حقيقة أن اثباتنا له يستعين بمسلمة أصغر حـد أعلى LUB ونظرية هاين ـ بوريل.

نظرية 5.5:

إذا كانت f متصلة على فترة مغلقة [a, b] فإنها تكون منتظمة الاتصال على [a, b].

البرهان:

نفـرض أن f متصلة عـلى كـل c في [a, b]، ونفـرض أن $\varepsilon > 0$ ، ولكـل c في [a, b] نختار $\delta_c > 0$ بحيث إن:

$$|x - c| < \delta_c \quad \text{يؤدي إلى} \quad |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

الآن ندرس تجمّع الفترات المفتوحة:

$$\mathcal{G} = \left\{\left(c - \frac{\delta_c}{2} ، c + \frac{\delta_c}{2}\right) : c \in [a, b]\right\}$$

لكل c في [a, b] توجد فترة في $\mathcal{G}$ مركزها c وبالتالي فمن الواضـح ان $\mathcal{G}$ هو غـطاء مفتوح للفترة [a, b]. ووفقاً لنظرية هاين - بوريل يوجد تجمع جزئي نهائي (finite) من $\mathcal{G}$ يغطي [a, b] ولنقل:

$$[a,b] \subset \left(c_1 - \frac{\delta_1}{2}, c_1 + \frac{\delta_1}{2}\right) \cup \ldots\ldots \cup \left(c_n - \frac{\delta_n}{2} ، c_n + \frac{\delta_n}{2}\right) \qquad (2)$$

حيث δ_i تستخدم مكان δ_{c_i}. نُعرِّف:

$\delta = \min\left\{\frac{\delta_1}{2} ، \ldots ، \frac{\delta_n}{2}\right\}$. والآن إذا كان $|x_1 - x_2| < \varepsilon$ فإن x_1 مـوجود في احدى الفترات n في (2)، ولذا فلبعض c_i يكون $|x_1 - c_i| < \frac{\delta_i}{2}$. وبذلك فإن:

$$\begin{aligned}
|x_2 - c_i| &= |(x_2 - x_1) + (x_1 + c_i)| \\
&\leqslant |x_2 - x_1| + |x_2 - c_i| \\
&< \delta + \frac{\delta_i}{2} \\
&\leqslant \delta_i
\end{aligned}$$

وهكذا ووفقاً لاختيارنا للعد δ_i يكون:

$$\left|f(x_2) - f(c_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad \left|f(x_1) - f(c_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

مما يؤدي إلى:

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leqslant \left|f(x_1) - f(c_i)\right| + \left|f(x_2 - f(c_i)\right| < \varepsilon.$$

وبذلك فإن f متصلة بانتظام على $[a, b]$.

وحتى الآن كانت كل أمثلتنا على دوال متصلة بانتظام متميز بخاصية أن منحنياتها ذات ميل محدود على D. ومن الطبيعي أن نحدس بأن هناك علاقة وثيقة بين الاتصال المنتظم وميل المنحني، فالتعريف يتطلب أن يكون الفرق الرأسي $f(x_1) - f(x_2)$ صغيراً طالما كان الفرق الأفقي $x_1 - x_2$ صغيراً بدرجة كافية. وفي الحقيقة إنّ مثل هذه العلاقة سنثبتها عندما نناقش المشتقة. غير أن هذه العلاقة تتحقق في اتجاه واحد فقط، موجودة وسنقدم البرهان عليها سنبين فيما بعد أنّه ليس من الضروري أن يكون لمنحني الدالة ميل محدود لكي تكون الدالة متصلة بانتظام.

مثال 5.7:

ندرس الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ على $[0, 1]$. وعلى الرغم من أن للدالة f مماساً رأسياً عند $x = 0$ فلا يزال للدالة اتصال منتظم عند $[0, 1]$ لأن f متصلة في كل نقط الفترة المغلقة $[0, 1]$. ان اثبات هذا مباشرة من التعريف بتعيين علاقة لـ δ وبدلالة ε يعتبر تمريناً جيداً للاختبار (انظر تمرين 4.5.7).

5.4 المعيار المتتالي للاتصال المنتظم

(The Sequential Criterion for Uniform Continuity)

ينص المعيار المتتالي للاتصال على أن الدالة المتصلة تتميز بخاصية تحويل أو رسم (اقتران) (mapping) متتاليات تقاربية من النطاق D إلى ـ في (into) متتالية متقاربة في المدى. وهناك تمييز مشابه للاتصال المنتظم يستخدم متتاليات كوشي بدلاً من المتتاليات التقاربية.

نظرية 5.6: المعيار المتتالي للاتصال المنتظم:

إذا كانت f دالة و D فئة جزئية محدودة من R فإن المنطوقين التاليين متكافئان:

(ii) f متصلة بانتظام على D.

(iii) إذا كانت s متتالية كوشي في D فإن $\{f(s_n)\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي.

البرهان:

نفرض أن (i) صحيح، ونفرض أن s متتالية كوشي في D وان $\varepsilon > 0$. عندئذٍ يوجد عدد موجب δ بحيث إنه إذا كان x_1, x_2 في D فإن

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \text{يؤدي إلى} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

وحيث أن s متتالية كوشي، يمكننا اختيار N بحيث إن:

$$m, n > N \quad \text{تؤدي إلى} \quad |s_m - s_n| < \delta$$

عندئذ:

$$|f(s_m) - f(s_n)| < \varepsilon \quad \text{طالما كان} \quad m, n > N$$

وبالتالي فإن $\{f(s_n)\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي.

وبالعكس نفرض أن f ليست متصلة بانتظام على الفئة المحدودة D. عندئذ يوجد عدد موجب ε^* بحيث يكون لكل n من $\mathbb{N}$ سيوجد عددان s_n, t_n في D يحققان:

$$|s_n - t_n| < \frac{1}{n} \quad ، \quad |f(s_n) - f(t_n)| \geqslant \varepsilon^*$$

وبما ان D محدودة فإن نظرية بولتزانو - ڤيرشتراس تضمن وجود متتالية جزئية تقاربية لـ s وليكن $\lim_n s_{k(n)} = L$. وبما أنّ $s - t$ متتالية صفرية و:

$$t_{k(n)} = s_{k(n)} + (t_{k(n)} - s_{k(n)}),$$

ينتج من النظرية 2.3 أن $\lim_n t_{k(n)} = L$.

(لاحظ أن L قد لا تكون منتمية إلى D ولكن ذلك غير ذي أهمية).

والآن نعرّف المتتالية u كما يلي:

$$u = \{s_{k(1)} ، t_{k(1)} ، s_{k(2)} ، t_{k(2)} ، \ldots\}.$$

وبذلك يكون لـ u النهاية L، وهكذا ووفقاً للنظرية 3.2 تكون u متتالية كـوشي في D. ولكن لكل n:

$$|f(u_{2n-1}) - f(u_{2n})| = |f(s_{k(n)}) - f(t_{k(n)})| \geqslant \varepsilon^*.$$

وبـذلك فـإن $\{f(u_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ليست متتاليـة كوشي. بـذلك لا يصـح (ii) وهكـذا يتم البرهان.

في البرهان السـابق لم نستعن بمحدوديـة D في إثبات أن (i) تؤدي إلى (ii). ولـذلك يمكن استنتاج أن الدالـة المتصلة بانتـظام على أي نـطاق تكون متتـالية كـوشي. وفي إثبات أن (ii) تؤدي إلى (i) استعنا بمحدودية D التي كانت ضرورية لتطبيق نظرية بولتزانـو ـ ڤيـرشتراس. ومن المهم أن هذا التضمين غير صحيح في النطاقات اللامحدودة. وكمثال مضاد يمكننا تذكـر أن $f(x) = x^2$ ليست متصلة بـانتظام عـلى $\mathbb{R}$ (مثال 5.3 أ). ولكن f لا (تَقْرِن)(map) متتالية كوشي في متتالية كوشي؛ لأنه إذا كانت s متتالية كوشي فإن s تقاربية. ووفقـاً للنظريـة 2.4 فإن s^2 أيضاً تقاربية. وبالتالي فإن

$\{f(s_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{s_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي.

وكما رأينا فإن المعيار المتتالي للاتصال المنتظم هو أداة مناسبة لبرهان أن دالة مـا معطاة غـير متصلة بانتظام.

5.4 تماريـن

1 ـ أثبت أن $f(x) = x^3$ ليست متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

2 ـ أثبت أن $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ليست متصلة بانتظام على $(0, 1]$ (ارشاد: عـيّن متتالية كوشي s في $(0, 1]$ بحيث يكون

$$|f(s_n) - f(s_{n+1})| \geqslant 1$$).

3 ـ أثبت أن $f(x) = \frac{1}{(2x-1)}$ ليست متصلة بانتظام على $\left[0 ، \frac{1}{2}\right)$.

4 ـ أثبت أن $f(x) = \tan x$ ليست متصلة بانتظام على $\left[0 ، \frac{\pi}{2}\right)$.

5 ـ أثبن أن $\frac{1}{x^2}$ متصلة بانتظام على $[1 ، \infty)$.

6 ـ أثبت أن $f(x) = \sqrt{x}$ متصلة بانتظام على $[c ، \infty)$ لأي $c > 0$.

7 ـ أثبت أن $f(x) = \sqrt{x}$ متصلة بانتظام على $[0 ، \infty)$ وذلك بالاستعانة بالتعريف 5.1 واختيار $\delta = \frac{\varepsilon^2}{4}$ (قارن بالمثال 5.7).

8 ـ أثبت أنه إذا كانت f متصلة بانتظام على (a, b) فإن f محدودة على هذه الفترة.

9 ـ أثبت أنه إذا كانت f متصلة بانتظام على $[a, b]$ ومتصلة بانتظام على $[b, c]$ فإن f متصلة بانتظام على $[a, c]$.

10 ـ أثبت أنه إذا كانت f, g متصلتين بانتظام على D، فإن $f + g$ متصلتين بانتظام على D.

11 ـ أثبت أنه إذا كانت f متصلة في (a, b) وكان $\lim_{a^+} f(x)$ ، و $\lim_{b^-} f(x)$ موجودين فإنه يمكن تعريف f (أو إعادة تعريفها) عند a, b بحيث تكون متصلة بانتظام على $[a, b]$.

12 ـ أثبت أنه إذا كانت f متصلة بانتظام على (a, b) فإن $\lim_{a^+} f(x)$، و $\lim_{b^-} f(x)$ موجودان.

الفصل السادس

6

المشتقة

The Derivative

6.1 خوارج قسمة الفرق

Difference Quotients

ندرس الدالة العددية f التي يحوي نطاقها الفترة المفتوحة حول العدد a، أي أن a نقطة داخلية في هذه الفترة. نعرّف «دالة الميل» Q_a بأنها

$$Q_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

حيث h في الفترة المفتوحة $(-\delta, \delta)$ التي تكون بدورها في نطاق f. إنّ دالة الميل هذه تسمى خارج قسمة الفرق للدالة f قرب a. والتحوير الهندسي لهذه الكمية مألوفٌ سابقاً لدى القارىء. لاحظ أن Q_a غير معرّفة عند الصفر، ولكن هذا بالطبع لا يعني عدم وجود نهايتها عندما تؤول h الى الصفر.

تعريف 6.1:

يقال بأن الدالة f قابلة للتفاضل (differentiable) عند a إذا كان لـ Q_a نهاية عند الصفر. وفي هذه الحالة نكتب:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} Q_a(h)$$

إن التجلّي الهندسي للاشتقاق يتبين في ملاسة واتصال منحني الدالة f عند a. على سبيل المثال فإنّ الدوال كثيرة الحدود التي لا تحتوي رسومها البيانية على انكسارات أو أركان حادة تكون قابلة للتفاضل عند أي مكان (انظر تمرين 6.1.2).

ولكن دوال مثل $|x|$، $\frac{1}{x}$ ، $\sqrt{|x|}$ غير قابلة للتفاضل عند الصفر؛ لأن منحنيات هذه الدوال غير ملساء.

قبل دراسة هذه الدوال بتفصيل أكثر، نسجل إمكانية استخدام التعريف 6.1 لتعريف دالة «مشتقّة» جديدة f' تكون قيمتها عند a مساوية للعدد $f'(a)$. لهذا السبب فإن نطاق f' يكون فئة جزئية من نطاق f.

الدالة f' تسمى المشتقة الأولى للدالة f.

مثال 6.1:

لنفرض أن $f(x) = |x|$ ونأخذ $a = 0$. ومن ذلك يكون لدينا:

$$Q_0(h) = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{if } h > 0 \\ -1, & \text{if } h < 0 \end{cases}$$

ولذلك فإن $\lim_{h\to 0} Q_0(h)$ غير موجودة؛ إذْ إنّ النهايتين اليمنى اليسرى غير متساويتين.

مثال 6.2:

لنفرض أن $f(x) = \sqrt{|x|}$.

مرة أخرى نأخذ $a = 0$ فيكون لدينا:

$$Q_0(h) = \frac{\sqrt{|0+h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \frac{\sqrt{|h|}}{h}$$

إذا كان $h > 0$ فهذا يعطي $Q_0(h) = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

و $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$ ، إذاً فإنّ النهاية اليمنى لـ Q_0 غير موجودة. ومن ذلك فإن Q_0 لا

تكون لها نهاية عندما تؤول h إلى الصفر. (النهاية اليسرى غير موجـودة أيضاً ولكن ليس من الضروري برهان ذلك).

مثـــال 6.3:

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$.

نرى أن $f(0)$ غير معرّفة وهكذا فإن $Q_0(h)$ غير معرفة لأي h.

إذن $f'(0)$ غير موجودة.

في المثـال الثالث نلحظ ضرورة أن يكـون العدد a في نـطاق f لكي تكـون الـدالـة قـابلة للاشتقاق. ولا يكفي أن تكون الدالة معرَّفة كيفياً عند a. المثال التالي يوضح ذلك.

مثـــال 6.4:

إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{if} \quad x \neq 3 \\ 4 \quad , & \text{if} \quad x = 3 \end{cases}$$

فإن:

$$Q_3(h) = \frac{2(3 + h) + 1 - 4}{h} = \frac{3}{h} + 2;$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{h \to 0} Q_3(h) = \infty,$$

ومن ذلك ينتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 3.

يدلنا هـذا المثال عـلى وجوب أن تكـون $f(a)$ هي القيمة المنـاسبة. إنّ اعـادة النظر في تعـريف $f'(a)$ يسلط بعض الضوء عـلى ذلك. تـوصلنا تجـربتنا السـابقـة إلى استنتـاج أن

خارج القسمة يزداد بدون حدود أي يؤول الى ∞، كلما كان البسط بعيداً عن الصفر. لمنع هذا «الانفجار» لا بد أن يقترب البسط أيضاً من الصفر:

$$\lim_{h\to 0} \left[f(a+h) - f(a)\right] = 0,$$

أو ما يكافئها،

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

النهاية الأخيرة هذه مكافئة للاتصال عند a. هذا الاستنتاج قادنا إلى أول نظرية في هذا الفصل، والتي تعطي علاقة بين القابلية للاشتقاق والاتصال.

نظرية 6.1:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a، فإن f متصلة عند a.

البرهان:

لنفرض أن $\varepsilon > 0$.

بما أن $\lim_{h\to 0} Q_a(h) = f'(a)$ نستطيع أن نختار عدداً موجباً δ بحيث إنه إذا كان $|h| < \delta$، فإن:

$$|Q_a(h)| \leqslant |f'(a)| + 1$$

ونستطيع أيضاً أن نختار δ أصغر من ذلك إذا كان ضرورياً، بحيث يكون:

$$\delta < \frac{\varepsilon}{|f'(a)| + 1}$$

الآن $|h| < \delta$ تتضمّن:

$$|f(a+h) - f(a)| = \left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right| \cdot h = |Q_a(h)|\,|h|$$

$$< \left\{|f'(a)| + 1\right\} \frac{\varepsilon}{|f'(a)| + 1} = \varepsilon$$

لهذا السبب فإن $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ أو $\lim_{h\to 0} f(x) = f(a)$.

من السهل إثبات أن كل دالة قوى (أي: $f(x) = x^n$) قابلة للاشتقاق (انظر التمرين 6.1.6 أ). من ذلك وباستخدام النظرية 4.6 لضرب وجمع النهايات الدالية، نستنتج أن كل دالة كثيرة الحدود (Polynomial function) قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من $\mathbb{R}$ (أنظر التمرين 6.1.2).

بهدف إعطاء أمثلة، نفرض أن القوانين المعتادة للاشتقاق والمدروسة في مبادىء التفاضل والتكامل قد برهنت.

مثال 6.5:

لنفرض أن:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{if} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{if} \quad x = 0 \end{cases}$$

نؤكد أن f متصلة عند أي نقطة. والنقطة غير العادية هي نقطة الأصل.

وبما أن $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1$ فإنه ينتج بسهولة أن $|f(x)| \leqslant |x|$ ؛ وبالتالي فإن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

ثم لغرض الاشتقاق، إذا كان $x \neq 0$ فإن:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

إذا كان $a = 0$ فإننا نحصل:

$$Q_0(h) = \frac{h\sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

في كل فترة مفتوحة $(-\delta, \delta)$ نجد أن $\sin\left(\frac{1}{h}\right)$، تأخذ كل القيم المحصورة بين 1 و -1 عدد لانهائي من المرات. إذن فإن $\lim_{h\to 0} Q_0(h)$ غير موجودة. لهذا السبب فإن f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر.

مثـــال 6.6:

لنفرض أن:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{if} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{if} \quad x = 0 \end{cases}$$

في هذه الحالة فإن عامل السعة x^2 كافي لجعل f قابلة للاشتقاق عند الصفر؛ لأن:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} Q_0(h) = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

عند $x \neq 0$ فإننا نستطيع الاعتماد على صيغ الاشتقاق الأساسية لحساب:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

نستطيع استخدام هذه الصيغ أيضاً لحساب اشتقاق الدالة f' أي الاشتقاق الثاني للدالة f والـذي يرمـز له f''. لا تـوجد أي مشكلة عنـد النقط ما عـدا عنـد الصفـر، ولكن عنـدمـا $a = 0$، فإن خارج قسمة الفرق للدالة f' هو:

$$Q'_0(h) = \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \frac{f'(h)}{h}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - \left(\frac{1}{h}\right) \cos\left(\frac{1}{h}\right)$$

من الـواضح أن $Q'_0(h)$ غـير محدودة عنـدما h تؤول إلى الصفـر، وبذلـك فـإن نهايـة $Q'_0(h)$ غير موجودة.

لهذا السبب فإن f قابلة للاشتقاق عند الصفر، ولكن ليس لها مشتقة ثانية عند الصفر.

تماريـن 6.1

1 - أوجد لكل من الدوال التالية صيغة لـ $f'(x)$ وذلك بتبسيط $Q_x(h)$ وإيجاد نهايتها عندما h تؤول إلى الصفر:

أ - $f(x) = x^n$ عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً.

ب - $f(x) = \frac{1}{x}$.

ج - $f(x) = \sqrt{x}$

[إرشاد: $[(x + h) - x] = (\sqrt{x + h} - \sqrt{x})(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})$]

د - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

هـ - $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

و - $f(x) = \sqrt{2x + 1}$.

ع - $f(x) = \frac{x}{(2x - 3)}$.

2 - برهن أن أي دالة كثيرة الحدود $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ قابلة للاشتقاق وأن

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1 .$$

3 - ناقش الاتصال والقابلية للاشتقاق للدالة f عند الصفر حيث،

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{if} \quad x > 0, \\ 0, & \text{if} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

4 - ناقش وجود كل من $f'(0)$ ، $f''(0)$ ، ... ، $f^{(n)}(0)$ عندما تكون:

$$f(x) = \begin{cases} x^n, & \text{if} \quad x > 0, \\ 0, & \text{if} \quad x \leqslant 0; \end{cases}$$

و n عدداً صحيحاً موجباً.

5 - برهن أن المشتقة الأولى للدالة غير تناقصية وقابلة للاشتقاق، غير سالبة. بالمثل برهن أن المشتقة الأولى لدالة غير تزايدية وقابلة للاشتقاق ليست موجبة.

6 - برهن القوانين الآتية للاشتقاق مع العلم بأن f, g دالتان قابلتان للاشتقاق.

أ - $(f + g)' = f' + g'$.

ب - $(fg)' = f'g + fg'$.

ج - $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{(f'g - fg')}{g^2}$.

7 - استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة قاعدة ليبنتز لايجاد المشتقة النونية لحاصل الضرب.

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + \dots + fg^{(n)},$$

حيث يدل $f^{(k)}$ على المشتقة من الرتبة k للدالة f و $\binom{n}{k}$ يدل على معامل مفكوك ذات الحدين (binomial corfficient) و $f^{(0)} = f$.

6.2 قاعدة السلسلة Chain Rule

النتيجة التالية تسمى بقاعدة السلسلة وقد استخدمت كثيراً في مبادىء التفاضل والتكامل. وهي تسمح لنا بحساب مشتقات الدوال التراكيبية كحاصل ضرب دالتين. نتذكر من البند 4.3 اننا نكتب تراكب الدالتين f, g كالآتي: $f \circ g$؛ أي أنه إذا كان x في نطاق g، $g(x)$ في نطاق f فإن:

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right].$$

في المناقشة التالية نفترض أن نطاق f يحتوي على فترة مفتوحة حول النقطة $g(a)$.

نظرية 6.2 (قاعدة السلسلة):

إذا كانت g قابلة للاشتقاق عند a والدالة f قابلة للاشتقاق عند $g(a)$، فإن الدالة التراكيبة $f \circ g$ قابلة للاشتقاق عند a، و:

$$(f \circ g)'(a) = f'\left[g(a)\right] g'(a)$$

البرهان:

لنفرض أن $Q_a(h)$ هو خارج قسمة الفرق للدالة $f \circ g$ قرب a. للتمييز بينه وبين خارج قسمة الفرق لكل من f و g، نكتب:

$$G_a(h) = \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

و

$$F_{g(a)}(t) = \frac{f\left[g(a) - t\right] - f\left[g(a)\right]}{t}$$

ندرس $Q_a(h)$ على النحو الآتي:

$$Q_a(h) = \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f\left[g(a+h)\right] - f\left[g(a)\right]}{g(a+h) - g(a)} \cdot \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h} & \text{if } g(a+h) \neq g(a). \\ 0 & \text{if } g(a+h) = g(a). \end{cases}$$

لنفرض أن t تدل على $g(a+h) - g(a)$ وبذلك يكون $g(a+h) = g(a) + t$. وبهذا التعويض يكون لدينا:

$$Q_a(h) = \begin{cases} \dfrac{f[g(a+h)] - [g(a)]}{t} \cdot \dfrac{t}{h}, \\ 0 \ldots\ldots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_{g(a)}(t)\, G_a(h) & \text{if} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad t = 0 \end{cases}$$

نظراً لأننا نريد بـرهان أن $Q_a(h)$ تقـترب إلى $f'[g(a)]\, g'(a)$ ، يكون من الأسهـل استعمال السطر العلوي من المعادلة (1). لهذا السبب نقسم المناقشة الى حالتين:

الحالة (أ):

نـفـترض أن $g(a+h) \neq g(a)$ لـكـل h في $\triangle_0 = (-\delta ، 0) \cup (0 ، \delta)$. إذن الصيغة العليا هي الوحيدة التي نحتاجها حتى نحصل على $\lim_{h \to 0} Q_a(h)$. بما أن g قابلة للاشتقاق عند a فإن $\lim_{h \to 0} G_a(h) = g'(a)$. استنـاداً النظريـة 6.1 فإن g متصلة عنـد a، وهكذا:

$$0 = \lim_{h \to 0} \{g(a+h) - g(a)\} = \lim_{h \to 0} t.$$

اذن يكون:

$$\lim_{h \to 0} F_{g(a)}(t) = \lim_{t \to 0} F_{g(a)}(t) = f'[g(a)].$$

عندما h تؤول إلى الصفر، فإن نهاية حاصل الضرب $F_{g(a)}(t)\, G_a(h)$ تساوي حاصل ضرب النهايتين.

إذن ينتج:

$$\lim_{h \to 0} Q_a(h) = f'[g(a)]\, g'(a).$$

الحالة (ب):

لنفرض أن لكل $\delta > 0$ تحتوي الفئة $\triangle_0 = (-\delta ، 0) \cup (0 ، \delta)$ على بعض h^* حيث يكون $g(a+h^*) = g(a)$. ولكل واحدة من هذه القيم h^* يكون لدينا:

$$G_a(h^*) = \frac{f(a + h^*) - g(a)}{h^*} = 0$$

إذن فإن خارج قسمة الفرق للدالة g بالقرب من a يساوي صفراً عند كل هذه القيم h^* التي تظهر قرباً كافياً من الصفر.

إذن فإن الصفر هو الاحتمال الوحيد لقيمة $\lim_{h \to 0} G_a(h)$. ولا بد من وجود هذه النهاية؛ لأن g قابلة للاشتقاق عند a.

من ثمّ $g'(a) = 0$. بالنظر إلى (1) نستنتج أنه كلما اقتربت h من الصفر يؤول كل من السطرين العلوي والسفلي إلى القيمة الصفرية للنهاية. وهذا بالطبع يساوي $f'[g(a)]\, g'(a)$؛ لأن $g'(a) = 0$، وبهذا نكون قد برهنا الحالة (ب).

تمارين 6.2

1 ـ برهن أنه إذا كانت g قابلة للاشتقاق و n عدداً صحيحاً موجباً فإن $h(x) = [g(x)]^n$ تكون للاشتقاق وأثبت الصيغة $h'(x) = n\,[g(x)]^{n-1}\, g'(x)$.

(إرشاد: استخدم التمرين 6.1.1 أ).

2 ـ برهن أنه إذا كانت g قابلة للاشتقاق فإن $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ قابلة للاشتقاق (عندما تكون $g(x) \neq 0$).

(إرشاد: استخدم التمرين 6.1.1 ب).

3 ـ برهن أنه إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق وذات قيم موجبة فإن $h(x) = \sqrt{g(x)}$ قابلة للاشتقاق.

(إرشاد: استخدم التمرين 6.1.1 جـ).

4 ـ لنفرض أن f دالة أحادية (one-to-one) وأن ϕ الدالة العكسية للدالة f، أي أن $f[\phi(x)] = x$. برهن أنه إذا كانت ϕ و f قابلتين للاشتقاق فإن:

$$\phi'(a) = \frac{1}{f'[\phi(a)]}$$

5 ـ استخدم الاستقراء الرياضي لتوسيع قاعدة السلسلة إلى مشتقة الدالة التراكيبية من n من الدوال:

$$\phi(x) = (f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1)\, x = f_n \left[f_{n-1}[\ldots f_2\, [f_1(x)\ldots]\right]$$

6.3 نظرية القيمة الوسطى The Law of The Mean

تؤكد الخلاصة التي أعطت هذا البند عنوانه أن معدّل (أو متوسط) التغير لدالة على فترة يساوي بالضرورة واحداً من قيم نسبة التغيّر اللحْظي في تلك الفترة. إن التوضيح الفيزيائي (physical) لذلك يمكن أن يعطى كالآتي: إذا قمت بقيادة سيارة 100 ميل في ساعتين فإن سرعتك اللَحْظية كما تراها في العدّاد لا بد أن تكون 50 ميلاً لكل ساعة على الأقل مرة واحدة خلال الساعتين.

إن التفسير الهندسي لقانون القيمة الوسطى (الوسط) مألوف لدينا من دراسة مبادىء التفاضل والتكامل. معدل التغير لدالة f على الفترة [a, b] هو ميل الخط الواصل بين نقطتي النهاية لمنحني الدالة. إمّا نسبة التغيّر اللحظية فتساوي ميل خط المماس في النقطة المعينة على مُنحني الدالة. ويؤكد قانون القيمة الوسطى أنّ هناك نقطة ما على المنحني حيث يكون المماس موازياً للخط المذكور أعلاه. (انظر الشكل 6.1).

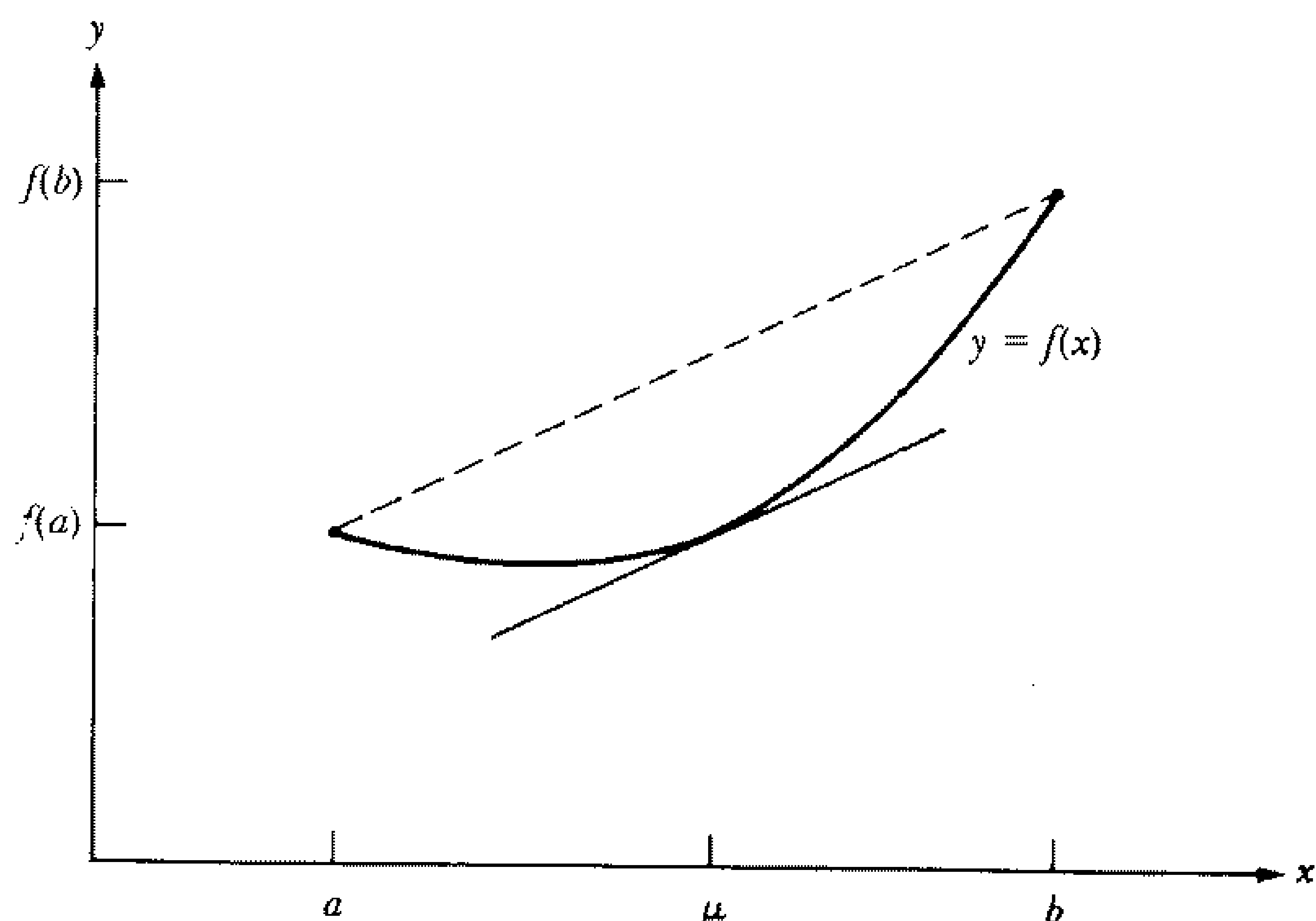
بالطبع لا نتوقع أن تكون هذه الخاصية صحيحة لكل دالة على الفترة [a, b]. فعلى سبيل المثال الدالة السُلمّية تكون مماساتها أفقية في أي نقطة. سنرى فيما بعد أن ملاسة (smoothness) المنحني (أي قابلية الدالة للاشتقاق) شيء ضروري لضمان صحة هذه الخاصية. ولكن لا بد أولاً من بعض الأعمال الأولية.

نظرية مساعدة 6.1:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على (a, b) ولها قيمة قصوى نسبية (relative extremum) عند μ في (a, b)، فإن $f'(\mu) = 0$.

البرهان:

من أجل التحديد نفترض أن $f(\mu)$ قيمة عظمى (maximum)، ومن ذلك نجد أن



شكل (6.1)

$f(\mu + h) \leqslant f(\mu)$ كلما كانت $\mu + h$ في فترة صغيرة حول μ. إذن فإن بَسْط $Q_\mu(h)$ لا يكون موجباً عندما تقترب h من الصفر، والذي يؤدي إلى:

$$Q_\mu(h) = \frac{f(\mu + h) - f(\mu)}{h} = \begin{cases} \leqslant 0, & \text{if} \quad h > 0, \\ \geqslant 0, & \text{if} \quad h < 0, \end{cases}$$

إذن كلما اقتربت h من الصفر، يكون الاحتمال الوحيد لقيمة النهاية لـ $Q_\mu(h)$ هو الصفر. بما أننا افترضنا أن f قابلة للاشتقاق عند μ، فإن هذه النهاية موجودة:

$$f'(\mu) = \lim_{h \to 0} Q_\mu(h) = 0.$$

من الواضح أن نفس المناقشة صحيحة عندما تكون $f(\mu)$ قيمة صغرى (minimum).

نظرية مساعدة 6.2 (نظرية رول):

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على (a, b) ومتصلة على $[a, b]$ و $f(a) = f(b) = 0$، فإنه توجد نقطة μ في (a, b) حيث تكون $f'(\mu) = 0$.

البرهان:

إذا كانت f هي الدالة الصفرية، فإنه من الواضح أن الاستنتاج يتحقق إذْ يمكن اختيار أي عدد في (a, b) ليكون μ. لنفرض أن f ليست الدالة الصفرية على (a, b). بما أن f متصلة على $[a, b]$ فإن النظرية 5.2 تضمن لنا أن f تأخذ قيمة عظمى وقيمة صغرى في $[a, b]$. وعلى الأقل فإنّ إحدى هاتين القيمتين القصوتين ليست صفراً (لأن f ليست دالة صفرية)، وهكذا فإنها لا تحدث عند a أو b. إذن f ذات قيمة عظمى أو قيمة صغرى عند نقطة داخلية ولتكن μ. باستخدام النظرية المساعدة 6.1، نستنتج أن $f'(\mu) = 0$.

من المفروض ملاحظة أن نظرية رول تُعْطي النتيجة الموضّحة في الشكل 6.1 في حالة خاصة وهي عندما تقع نقطتا النهاية للمنحني على محور السينات؛ إذ إن الخط الواصل بين النقطتين ذو ميل مساوٍ للصفر، لهذا السبب بحثنا عن نقطة يكون عندها المماس خطاً أفقياً، أي $f'(\mu) = 0$. نعمم الآن هذه النتيجة للحالة العامة حيث لا تكون قيمة الدالة عند نقطتي النهاية بالضرورة صفراً.

نظرية 6.3 (نظرية القيمة المتوسطة):

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على (a, b) ومتصلة على $[a, b]$، فإنه توجد نقطة μ في (a, b) يكون عندها

$$f'(\mu) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$

البرهان:

لندرس الدالة $\varnothing$ والمعطاة كالآتي:

$$\phi(x) = f(b) - f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}\right)(b - x). \tag{2}$$

لكي نطبق نظرية رول على ϕ، نتحقق من أن ϕ تحقق فروض نظرية رول. بما أن ϕ عبارة عن تركيب جبري خطي من الثوابت وكثيرات الحدود من الدرجة الأولى ومن f، نستنتج من

ذلك أن ϕ متصلة وقابلة للاشتقاق كلما كانت f متصلة وقابلة للاشتقاق.

بالفعل نستطيع اشتقاق الصيغة (2) لنحصل على:

$$\phi'(x) = -f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(-1). \qquad (3)$$

نعوض عن x بالنقطة a ثم b في (2)، فنجد أن $\phi(a) = \phi(b) = 0$. لهذا السبب فإن نظرية رول تؤكد لنا وجود μ في (a, b) حيث $\phi'(\mu) = 0$. بناءً على (3) هذا يعني:

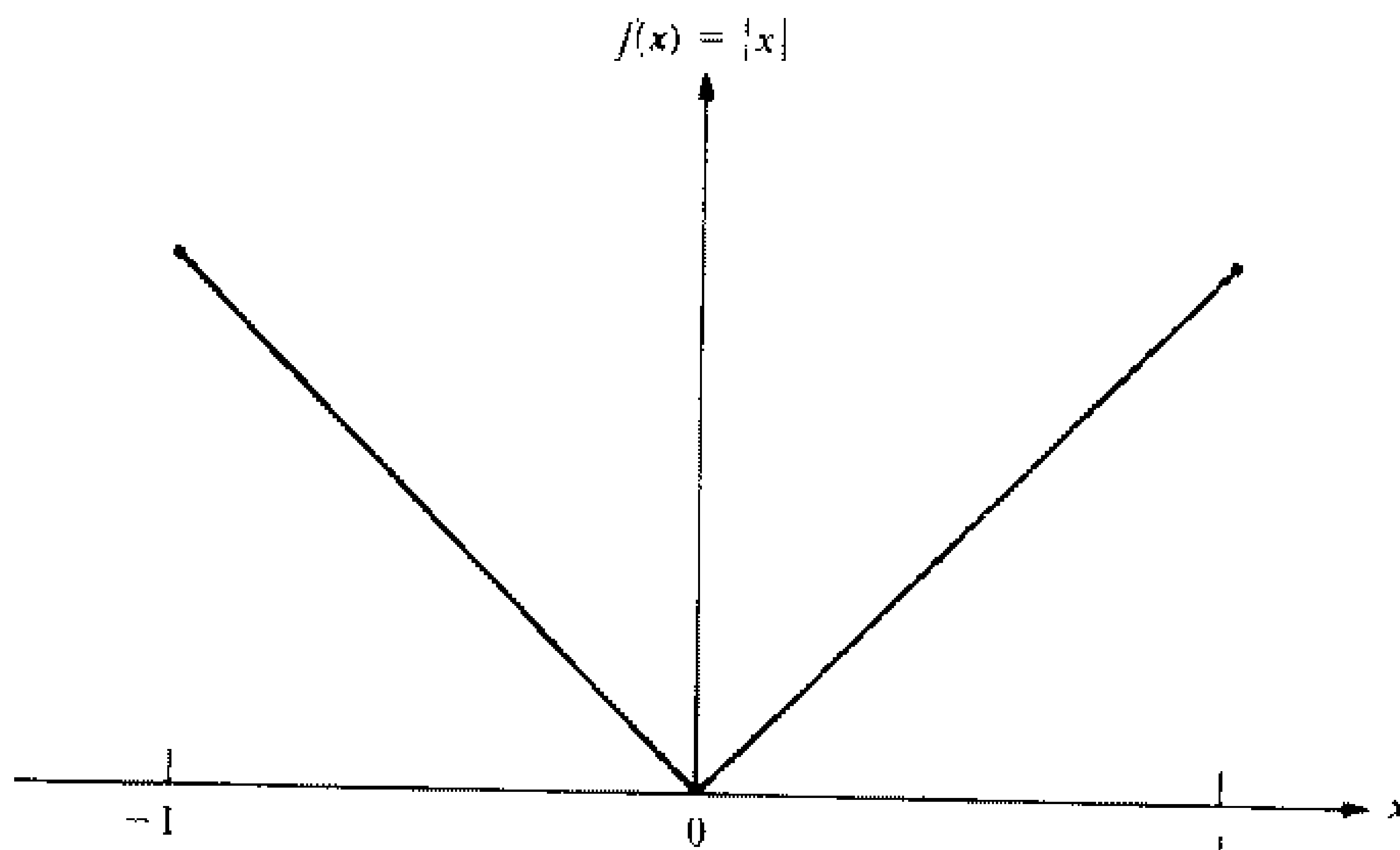
$$0 = -f'(\mu) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (4)$$

ومن الواضح أن هذا يكافىء (1).

كلما برهنا نظرية على الشكل «إذا كان A, B فإن C» فإنه من المستحسن أن نعطي أمثلة توضح أن كل جزء من المعطى ضروري لصحة الاستنتاج. اذن ندرس الدالتين التاليتين:

مثال 6.7:

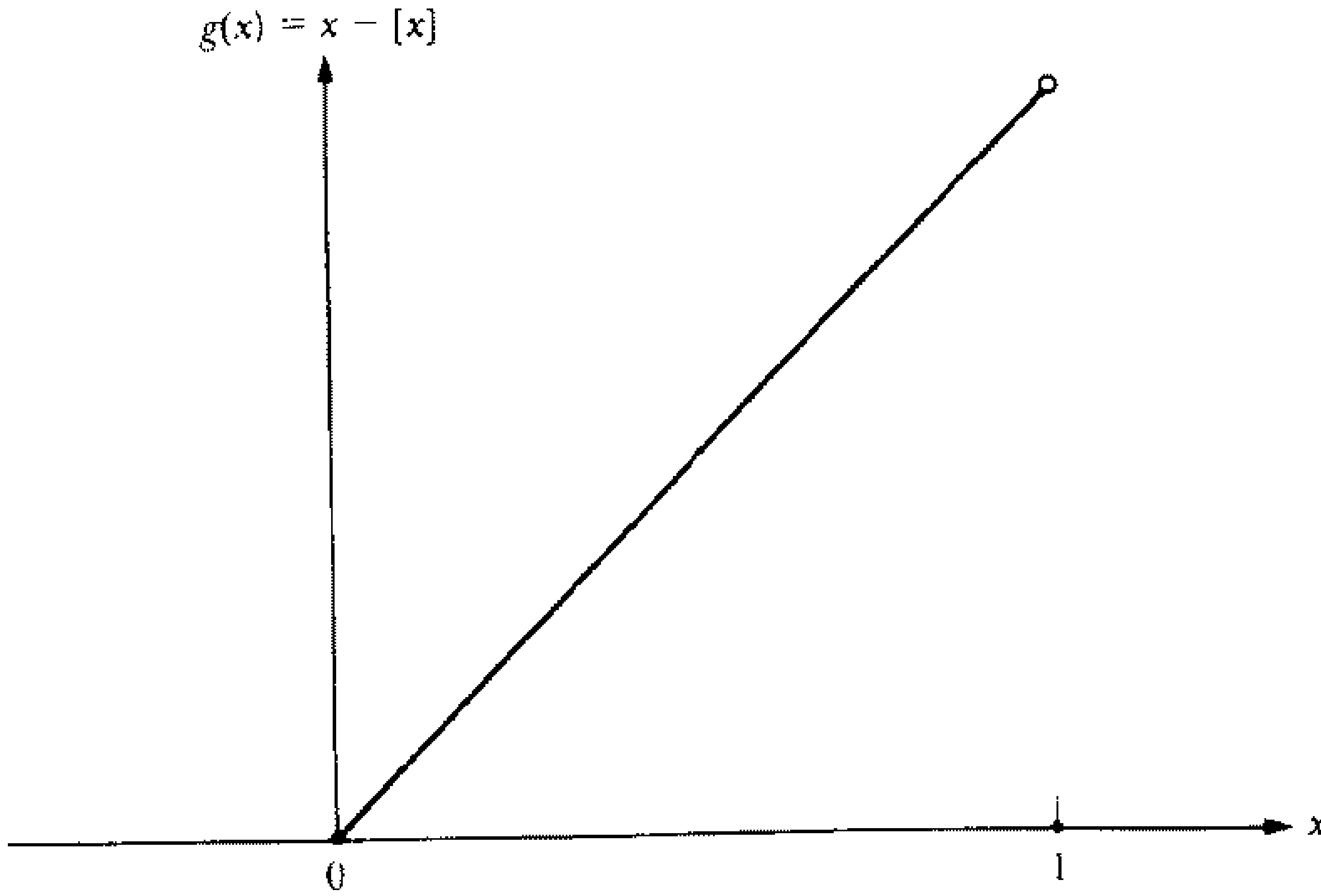
لنفرض أن $f(x) = |x|$ على الفترة $[-1 ، 1]$. بالرغم من أن f متصلة على $[-1 ، 1]$ ، نرى أن استنتاج قانون القيمة المتوسطة لا يصح؛ إذ لا وجود لمماس أفقي (انظر الشكل 6.2).



شكل (6.2)

مثــال 6.6 :

لنفرض أن $g(x) = x - [x]$ على $[0, 1]$ ، حيث $[x]$ دالة أكبر عدد صحيح. بالرغم من أن g قابلة للاشتقاق على $(0, 1)$ ، فهي غير متصلة على $[0, 1]$. مرة أخرى فإن فقدان المماس الأفقي هو السبب في عدم صحة قانون القيمة الوسطى (انظر الشكل 6.3).



شكل (6.3)

إن قانون القيمة الوسطى للمشتقات ذو أهمية كبيرة لا يمكن حصرها في كلمات قليلة. وسنقدم في النتائج والنظريات التالية بعضاً من نتائجه.

إن النتائج 6.3 أ، 6.3 ب هي الأساس في مفهوم التكامل غير المحدود.

نظرية 6.3 أ:

إن الدالة القابلة للاشتقاق والتي يكون تفاضلها مطابقاً للصفر على كل الفترة، لا بد أن تكون دالة ثابتة على تلك الفترة.

البرهان :

لنفرض أن f قابلة للاشتقاق وليست ثابتة على فترة ما. إذن توجد نقطتان a, b في

الفترة حيث يكون $f(a) \neq f(b)$. بتطبيق قانون القيمة الوسطى للدالة f على الفترة $[a, b]$ ، نحصل على نقطة μ في (a, b) حيث إن:

$$f'(\mu) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0.$$

لهذا السبب فإن f' لا يمكن أن تكون دالة صفرية على الفترة الأصلية.

نتيجة 6.3 ب :

تختلف دالتان قابلتان للاشتقاق على فترةٍ ما بقيمةٍ ثابتة إذا كانت مشتقتا الدالتين متساويتين على تلك الفترة.

البرهان:

لنأخذ f, g دالتين بحيث يكون $f' = g'$ ، ثم نطبِّق النتيجة 6.3 أ على دالة الفرق بينهما $f - g$.

تُبيِّن النتيجة التالية كيف يلعب قانون القيمة الوسطى دوراً في تحديد أين تكون الدالة تزايدية وأين تكون تناقصية.

نتيجة 6.3 ج :

إذا كانت الدالة f متصلة على $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على (a, b) وإذا كانت اشارة f' غير متغيرة على (a, b) ، فإن f دالة مطردة على $[a, b]$.

البرهان:

لنفرض أن $f'(x) \geqslant 0$ لكل x في (a, b)، ولنفرض أن x_1, x_2 نقطتان في $[a, b]$، لنقل $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$. استناداً إلى قانون القيمة الوسطى، توجد نقطة μ في (x_1, x_2) حيث يكون:

$$f(x_2) - (x_1) = f'(\mu)\,(x_2 - x_1) \geqslant 0$$

لهذا السبب فإن f غير تناقصية على $[a, b]$.

وبالمثل إذا كانت $f'(x) \leqslant 0$ على (a, b) فإن f غير تزايدية على $[a, b]$.

هنالك رموز مختلفة لقانون القيمة الوسطى غالباً ما تكون نافعة في بعض الأحيان. على سبيل المثال: إذا كانت f قابلة للاشتقاق في فترة مفتوحة حول a، فإننا نستطيع تطبيق قانون القيمة الوسطى على الفترة $[a, x]$ (أو $[x, a]$ في حالة $x < a$) ونحصل على μ بين x و a حيث:

$$f(x) = f(a) + f'(\mu)(x - a)$$

تكمن أهمية هذه الصيغة في أنه إذا كانت قيمة الدالة معروفة عند a وكانت نسبة تغيّرها قرب a معروفة أيضاً، فإن هذه المعلومات تستخدم لحساب قيمة f عند نقطة أخرى مختلفة عن a.

وهناك نوع من المسائل أقرب إلى النموذجي حيث يُستخدم قانون القيمة الوسطى لبناء متباينة تحتوي على دوال قابلة للاشتقاق. يتوضح ذلك في النتيجة التالية.

مفترض 6.1:

إذا كان $x > 0$، فإن $\sin x < x$.

البرهان:

إذا كانت $f(x) = x - \sin x$، عندئذٍ للقيمة μ في $(0, x)$ يكون:

$$f(x) = f(0) + f'(\mu)(x - 0)$$
$$= 0 + (1 - \cos \mu)(x).$$

وهكذا،

$$\sin x = x - x \cos\mu.$$

أو

$$x - \sin x = x \cos \mu,$$

إذا كان $x \leqslant 1$، فإن $0 < \mu < 1$ وبالتالي فإن $0 < \cos \mu < 1$. ونستنتج أن $\sin x < x$. إذا كان $x > 1$، فإنه من الواضح أن $\sin x \leqslant 1 < x$.

تمارين 6.3

استخدم نظرية القيمة الوسطى أو نظرية رول لبرهنة المسائل التالية:

١ - إذا كان $x > 0$، فإن $\log(1 + x) < x$.

٢ - إذا كان $x > -1$ و $x \neq 0$، فإن $\sqrt{1 + x} < 1 + \left(\frac{x}{2}\right)$.

٣ - إذا كان $x \neq 0$، فإن $\cos x > 1 - \left(\frac{x^2}{2}\right)$.

٤ - إذا كان $a < b$، فإن $e^a(b - a) < e^b - e^a < e^b(b - a)$.

٥ - إذا كان $x > 0$، فإن $\frac{x}{(1 + x^2)} < \arctan x < x$.

٦ - إذا كان $0 < x < 1$، فإن $x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

٧ - إذا كان $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة الحدود، ومعاملاتها تحقق:

$$\frac{a_n}{n + 1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0,$$

فإن المعادلة $P(x) = 0$ لها جذر واحد على الأقل في $(0, 1)$.

٨ - إذا كانت معادلة كثيرة الحدود $P(x) = 0$ ذات k من الجذور الحقيقية المختلفة، فإن المعادلة $P'(x) = 0$ لها على الأقل $k - 1$ من الجذور الحقيقية المختلفة.

٩ - إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{if} \quad x < 0, \end{cases}$$

فلا وجود لدالّة F حيث $F'(x) = f(x)$ لكل x في $\mathbb{R}$.

١٠ - إذا كان لـ f مشتقة محدودة على الفترة (a, b)، فإن f متصلة بانتظام على (a, b).

إنّ التفسير الهندسي للنظرية 6.4 هو نفسه لنظرية كوشي للقيمة المتوسطة (شكل 6.1)، ولكن في هذه الحالة يكون المنحني مُعطى بمعادلات بارامترية (وسيطية)، ولنقل $x = g(t)$ ، $y = f(t)$ ، حيث $a < t < b$.

نظرية 6.4 (قانون كوشي للقيمة الوسطى):

إذا كانت كل من g, f متصلة على $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على (a, b) ؛ وإذا كان $g'(t) \neq 0$ لكل t في (a, b) ، فإنه توجد نقطة μ في (a, b) يكون عندها:

$$\frac{f'(\mu)}{g'(\mu)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

البرهان:

أولاً نؤكد أن $g(b) \neq g(a)$. إذ إنّه باستخدام قانون القيمة الوسطى، توجد نقطة t^* في (a, b) حيث:

$$g'(t^*) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

ومن الفرض $g'(t^*) \neq 0$. إذن $g(b) \neq g(a)$. نعرّف دالة ϕ على $[a, b]$ بواسطة الصيغة:

$$\phi(t) = f(t) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right]\left[g(t) - g(a)\right].$$

كما في برهان نظرية القيمة الوسطى، نتحقق من أنّ ϕ تفي بشروط نظرية رول ونستنتج أن هناك نقطة μ في (a, b) حيث يكون $\phi'(\mu) = 0$. نحصل على المطلوب بأخذ المشتقة الأولى للدالة ϕ والتعويض عن t بالنقطة μ . (هذه التفصيلات مطلوبة في التمرين 6.4.4).

إن احدى نتائج الاتصال المُميّزة هي خاصية القيمة الوسطى (نظرية 5.3) والتي تقول بأنه إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما، فإن أي عدد بين قيمتين للدالة في مداها يكون أيضاً في مداها. لاحظنا أن هناك أمثلة لدوال تكون مشتقاتها دوال غير متصلة، ولكن كما تؤكد الخلاصة التالية فإنّ مشتقات الدوال من هذا النوع تتمتع بخاصية القيمة الوسطى. نتذكر من التمرين 6.3.9 أن الدالة السُلّمية والتي لا تتمتع بخاصية القيمة الوسطى لا يمكن أن تكون مشتقة لأيّة دالة.

نظرية 6.5:

إذا كانت f مشتقة أولى لأية دالة F في فترة ما، فإن للدالة f خاصية القيمة الوسطى على هذه الفترة؛ أي أنه إذا كان r عدداً بين $f(a)$ ، $f(b)$ ، فإنه يوجد عدد μ بين b, a بحيث يكون $f(\mu) = r$.

البرهان:

لندرس الدالة ϕ والمعطاة بالدالة $\phi(x) = F(x) - rx$. عندئذٍ:

$$\phi'(x) = F'(x) - r = f(x) - r$$

لهذا السبب فإننا نُبيِّن أن نوضح أن $\phi(\mu) = 0$ لبعض μ بين b, a. (نفترض من أجل التحديد أن $a < b$). بما أن ϕ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإنها تأخذ القيمتين العظمى والصغرى في $[a, b]$. إذا أخذت ϕ قيمةً عظمى أو صغرى في (a, b) نكون قد وصلنا إلى الاستنتاج، ذلك لأن النظرية المساعدة 6.1(انظر صفحة 126) تضمن أن ϕ دالة صفرية هناك. ولهذا يكفي أن نتجنّب حدوث القيمتين للدالة ϕ العظمى والصغرى عند نقطتي النهاية. هناك شرطان لحدوث ذلك:

أ ـ $\phi(a)$ هي نهاية عظمى و $\phi(b)$ هي نهاية صغرى، أو

ب ـ $\phi(a)$ تكون هي صغرى و $\phi(b)$ هي نهاية عظمى.

في الحالة (أ)،

$$\phi'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\phi(a+h) - \phi(a)}{h} \leqslant 0$$

لأن $\phi(a) \geqslant \phi(a+h)$ و

$$\phi'(b) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\phi(b+h) - \phi(b)}{h} < 0$$

ولكن هـذه تـؤدي إلى $f(a) \leqslant r$ و $f(b) \leqslant r$ ، وهو مـا يتناقض مـع الفرض بأن r بين $f(a)$ و $f(b)$. وبالمثل في الحالة (ب) يكون لدينـا $f(a) \geqslant r$ ، $f(b) \geqslant r$. لهذا السبب فإن ϕ ذات قيمة عظمى أو صغرى عند نقطة معينة μ في (a, b) والتي يكون عندها $\phi'(\mu) = f(\mu) - r = 0$.

نـلاحظ في النظريـة 6.5، أنّه ليس من الضروري أن تكـون الاعداد a و b نقـطتي نهايـة للفترة التي تكون عليها $F' = f$.

وبالفعل ان جـوهر خـاصية القيمـة الوسـطى يكمن في أنّه لأيـة نقطتـين b, a ولأي r محصورة بين $f(a)$ ، $f(b)$ فإن الدالة f تأخذ قيمة r لنقطة بين a و b. جدير بالملاحظة أن دالة بهذه الخاصية لا يمكن أن يكون لها انفصال قفزة (jump)، أي أن الـطريقة الـوحيدة التي يكـون فيها $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ غـير صحيح هي أن تكـون النهايـة غير مـوجودة من جانب واحد أو من جانبين.

تماريـــن 6.4

1 ـ لنفرض أن G هو الرسم البياني:

$$\left\{(x, y) : x = t^2 \text{ ، } y = t^2 \text{ ، } 0 \leqslant t \leqslant 1\right\}$$

أوجـد عـدد μ في $(0, 1)$ حيث يكـون المـماس للمنحني G مـوازيـاً للمستقيم المـار بالنقطتين $(0, 0)$ ، $(1, 1)$.

2 ـ بـرهن أن $f(x) = [x]$ ليست مشتقـة أولى لأيـة دالـة عـلى فـترة تحـوي عـددين صحيحين.

3 لنفرض أن:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{if} \quad x \neq 0, \\ 0 \;, & \text{if} \quad x = 0. \end{cases}$$

برهن أن $g(x)$ ليست مشتقة لأية دالة على أية فترة تحوي الصفر.

٤ ـ أعط التفصيلات التامة لبرهان قانون كوشي للقيمة الوسطى، (نظرية 6.4) وذلك بمتابعة برهان قانون القيمة الوسطى (نظرية 6.3).

6.5 صيغة تايلور مع الحدّ الباقي — Taylor's Formula with Remainder

في هذا البند نرجع إلى فكرة طرحت في البند 6.3، وهي أن نظرية كوشي للقيمة الوسطى أعطتنا طريقة لحساب $f(x)$ وذلك بمعرفة $f(a)$ و $f'(\mu)$ لنقطة μ بين a و x. لنفرض أننا نريد تقريب f بواسطة كثيرة الحدود ذات الدرجة الأولى على فترة ما حول a. إنّ الدالة التي رسمها البياني مماساً لمنحني الدالة f عند a تكون أحسن تقريب، وباستخدام المبادىء الأولية للتفاضل، نجد أن كثيرة الحدود يكون:

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{1}$$

لنفرض أن f لها مشتقة ثانية f'' حيث نرغب في اختيار كثيرة الحدود من الدرجة الثانية لتقريب f.

إذا اخترنا:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2, \tag{2}$$

فإن:

$$P_2(a) = f(a),$$
$$P_2' = f'(a),$$
$$P_2''(a) = f''(a).$$

إذن P_2 ذات منحني مشابه لمنحني f عند النقط القريبة من a. وبالتحديد، فإن لمنحنيات P_2

و f الارتفاع نفسه عند a، وكذلك الميل والانحناءنفسهما. الآن لنفرض أن f لها مشتقة من الرتبة n ونريد تقريب f بكثيرة الحدود من الدرجة n. باتباع الإجراءات السابقة، نختار:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{3}$$

عندها من السهل التحقق من أن $P_n(a) = f(a)$ ، $P'_n(a) = f'(a)$ و ..... ، $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$. من ذلك نرى أن P_n هي تقريب جيد للدالة f عند نقط قريبة من a. في حالة الدرجة الأولى، يشير قانون القيمة الوسطى بأننا نحصل على التّساوي بالضبط عند حساب التفاضل عند نقطة μ بدلاً من استعمال $f'(a)$ كما في P_1.
من المحتمل الحصول على التّساوي في حالة الدرجة n وذلك بالتعويض عن $f^{(n)}(a)$ بالقيمة $f^{(n)}(\mu)$ لقيمة ما μ مُخْتارة بشكل مناسب والتي تقع بين x, a . وهذا بالضبط ما تؤكده النظرية التالية.

نظرية 6.6 (صيغة تايلور):

نفترض f دالة حيث f، f′، ....، $f^{(n-1)}$ دوال متصلة على $[a, b]$ و $f^{(n)}$ موجودة على (a, b) . عندئذٍ توجد نقطة μ في (a, b) حيث يكون:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \left(\frac{f''(a)}{2!}\right)(b-a)^2 \ldots + \ldots + \left(\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!}(b-a)^n \tag{4}$$

البرهان:

لنفرض أن k عدد يحقق:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{k}{n!}(b-a)^n. \tag{5}$$

نريد إثبات أن $f^{(n)}(\mu) = k$ لبعض μ في (a, b). نعرّف Φ بأنها:

$$\phi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \left(\frac{f''(x)}{2!}\right)(b-x)^2 - \ldots.$$
$$- \left(\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\right)(b-x)^{n-1} - \left(\frac{k}{n!}\right)(b-x)^n. \qquad (6)$$

ستطيع التحقق من أن ϕ تفي بشروط نظرية رول (هذه التفاصيل مطلوبة في التمرين 6.5.1). وهذا يتضمّن وجود μ في (a, b) حيث $\phi'(\mu) = 0$. أخذ المشتقة الأولى للدالة ϕ في الصيغة (6) يعطينا:

$$\phi'(x) = -f'(x) + f'(x) - f''(x)(b-x) + f''(x)(b-x) - \ldots\ldots$$
$$- \ldots\ldots - \left(\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}\right)(b-x)^{n-1} + \left(\frac{k}{(n-1)!}\right)(b-x)^{n-1}. \qquad (7)$$

برهان نظرية 6.6 تنقصه بعض التفاصيل، ولكن هذه هي الطريقة نفسها التي تم بها برهان النظريات 6.3، و 6.4. ويعتبر إعطاء هذه التفاصيل تمريناً جيداً (وضرورة رياضية) (انظر التمرين 6.5.1).

6.5 تمارين

1 ـ أكمل التفاصيل في برهان النظرية 6.6.

2 ـ استخدم صيغة تايلور للحصول على كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة لتقريب الدالة $\sqrt{x+1}$. (خذ $a = 0$ في المعادلة (4)).

3 ـ استخدم صيغة تايلور للحصول على كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة لتقريب $\log(1+x)$.

4 ـ استخدم صيغة تايلور للحصول على كثيرة الحدود من الدرجة السابعة لتقريب $\sin x$.

5 ـ استخدم صيغة تايلور للحصول على كثيرة الحدود من الدرجة n لتقريب e^x.

6 ـ برهن أنه إذا كان $x > 0$ ، فإن:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x < 1 + x + \left(\frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

7 ـ برهن أن e عدد غير قياسي.

(ارشـاد: خـذ في صيغـة تـايـلور $f(x) = e^x$ ، $a = 0$ ، $b = 1$ وافـترض أن $e = \frac{p}{q}$ واضرب الكل في $(n-1)!$ حيث $n > q$).

6.6 قاعدة هوبيتال L'Hopital's Rule

عند حساب أية مشتقة نأخذ نهاية خارج القسمة حيث أحيانـاً يؤول كل من بسط ومقـام خارج القسمة إلى الصفر. اذن التعبير $\frac{0}{0}$ لا يعتبر غريباً، إذ نعرف أنه قد تكون لنهاية هـذه القسمة أيـة قيمة (أو ربمـا تكون النهـاية غـير موجـودة). ببساطـة ندرس $2x/3x$ ، x^2/x ، $2x/x^2$ ، $[x \sin (1/x)] /x$ عندما تؤول x إلى الصفـر. بالـرغم من أن كلاً منها على شكـل $\frac{0}{0}$ إلا أن النهايـات الثلاث الأولى هي $\frac{2}{3}$ و 0 و ∞ عـلى التوالي. بينما الحالة الأخيرة لا تؤول إلى نهاية. النتيجة التالية تعطينا طريقة مبسـطة لحساب مثـل هذه النهايات.

نظرية 6.7 (قاعدة هوبيتال):

إذا كانت f, g دالتين قابلتين للاشتقاق في فترة تحتوي على a و $g'(x) \neq 0$ ،

وإذا كانت

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

و

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)} \right] = L,$$

فإن

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

ملاحظة: تكون صحيحة هذه النتيجة في حـالة استبـدال $\lim_{x \to a}$ بـ $\lim_{x \to a^+}$ أو $\lim_{x \to a^-}$ أو $\lim_{x \to +\infty}$ أو $\lim_{x \to -\infty}$. بإمكان قيمة النهاية L أن تكون ∞ + أو ∞− حيث تظل النتيجة صحيحة.

البرهان:

لنفرض أن x قريب بما فيه الكفاية من a حيث خلال الفترة بين x, a تكون كل من f, g قابلة للاشتقاق و g' لا تكون صفرية. استناداً إلى قانون القيمة الوسطى لكوشي، يوجد نقطة μ بين x, a حيث يكون:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\mu)}{g'(\mu)} .$$

(لاحظ أن $f(a) = g(a) = 0$).

بما أن μ بين x, a و $x \to a$ فإن ذلك يتضمّن $\mu \to a$ ومن ذلك:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\mu\to a} \frac{f'(\mu)}{g'(\mu)} = L.$$

من الواضح أن المناقشة السابقة تنطبق على النهايات من الجانب الأيسر، ومن الجانب الأيمن وكذلك من الجانبين. أمّا الحالة التي تكون فيها $x \to \infty$ فإنّها تتطلب تغييراً طفيفاً. نستخدم الدالة المُساعدة $u(t) = \frac{1}{t}$ ونستخدم قاعدة السلسلة والحالة السابقة:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t\to0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{-f'(1/t)/t^2}{-g'(1/t)/t^2} = \lim_{t\to0^+} \frac{f'(u)\,u'(t)}{g'(u)\,u'(t)}$$

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{(f\circ u)'(t)}{(g\circ u)'(t)} = \lim_{t\to0^+} \frac{(f\circ u)(t)}{(g\circ u)(t)}$$

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

البرهان في حالة $x \to -\infty$ يتم بالطريقة نفسها.

مطلوب في التمرين 6.6.1 تفاصيل الحالة الأولى إذا استبدلت L بـ ∞، أي أن:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \quad \text{يؤدي إلى} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty .$$

ينبغي أن تكون تطبيقات قاعدة هوبيتال معروفة لدى الطالب من مبادىء التفاضل والتكامل. نوضح استخدام هذه القاعدة في الأمثلة التالية:

مثال 6.9:

أحسب $\lim_{x\to 1} \frac{(\log x)}{(x-1)}$.

نلاحظ أن $\frac{(\log x)}{(x-1)}$ يحقق فروض قاعدة هوبيتال.

اذن:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

مثال 6.10:

أحسب $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x^2}$. بعد تطبيق قاعدة هوبيتال مرة واحدة، لا يزال لدينا الشكل $\frac{0}{0}$ وبذلك نطبق قاعدة هوبيتال مرة أخرى. وجود النهاية في التطبيق الثاني يؤدي إلى وجود النهاية في التطبيق الأول والذي بدوره يؤدي إلى وجود النهاية. (وهذا أيضاً صحيح لعلاقة التساوي).

وتظهر الحسابات على النحو الآتي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} .$$

في حالة اعادة التطبيق لقاعدة هوبيتال كما في المثال السابق، من الضروري أن نتأكد في كل مرة أن لدينا التعبير $\frac{0}{0}$ وإلا فإن فروض النظرية غير مُحقّقة وبالتالي نحصل على نتائج خاطئة. لندرس الحالة التالية:

مثال 6.11:

أحسب $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - x - 2)}{(x^2 - 2x)}$. نمضي في الحل كالآتي:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 2} \frac{2x - 1}{2x - 2}$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2}{2} = 1$$

المتساوية الأولى صحيحة ولكن $\lim_{x\to a} \frac{(2x - 1)}{(2x - 2)}$ لا تساوي $\frac{0}{0}$ ، وبالتالي نحسب هذه النهاية بواسطة النظرية 4.6 كالآتي: $\frac{3}{2} = \frac{(4 - 1)}{(4 - 2)}$. لهذا السبب فإن التطبيقات المتكررة لقاعدة هوبيتال قد تقود إلى إجابات خاطئة.

نوع آخر من الشكل غير المحدود يشمل خارج قسمة حيث كل من البسط والمقام يزداد بدون حدود. باختصار نشير إلى ذلك «∞/∞» هذه الظاهرة نقابلها عند تحديد خط التقارب الأفقي asymptote لمنحني دالة ما مثل: $y = \frac{(2x^2 + 5)}{(x^2 - 2)}$ عندما $x \to \infty$ فإن كل من البسط والمقام يؤول إلى ∞ ولكن من السهل أن نرى أن خارج القسمة يؤول إلى 2. في حالة $y = \frac{e^x}{x}$ مرة أخرى نواجه الشكل ∞ / ∞ مرة أخرى، وليس من السهل إيجاد قيمة النهاية عندما $x \to \infty$. نستطيع استخدام قاعدة هوبيتال كما سنرى في النظرية التالية، لإيجاد مثل هذه النهايات، بواسطة مشتقات e^x و x على التوالي مما يعطينا $\lim_{x\to a} \frac{e^x}{1} = \infty$.

نظرية 6.8 (نظرية هوبيتال):

إذا كانت f, g دالتين قابلتين للاشتقاق في فترة تحوي العدد a و $g'(x) \neq 0$، وإذا كانت:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty \qquad (1)$$

و

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \qquad (2)$$

فإن:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \qquad (3)$$

ملاحظة: إن التفسير نفسه الذي أعطيناه في حالة $x \to a$ يستخدم هنا كما استخدم في النظرية 6.7، والذي يقول بأن النتيجة صحيحة في حالة النهاية من الجهة اليمنى والنهاية من الجهة اليسرى وكذلك من الجهتين؛ أيضاً في حالة $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$. كما انه يمكن استبدال L بـ $+\infty$ أو $-\infty$.

البرهان:

هنا سنتناول فقط، وبالتفصيل الحالة حيث $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. باستخدام (1) يوجد N^* كبير بما فيه الكفاية حيث إنه على (N^*, ∞) لا تكون قيمة أي من الدوال f، g، g'، g' صفراً. لكل x أكبر من N^*، تضمن النظرية 6.4 وجود نقطة μ في (N^*, x) تحقق:

$$\frac{f'(\mu)}{g'(\mu)} = \frac{f(x) - f(N^*)}{g(x) - g(N^*)} = \frac{f(x)}{g(x)} \left[\frac{1 - \left\{ \frac{f(N^*)}{f(x)} \right\}}{1 - \left\{ \frac{g(N^*)}{g(x)} \right\}} \right],$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\mu)}{g'(\mu)} \left[\frac{1 - \left\{ \frac{g(N^*)}{g(x)} \right\}}{1 - \left\{ \frac{f(N^*)}{f(x)} \right\}} \right]$$

$$= \frac{f'(\mu)}{g'(\mu)} \left[\frac{1 - \left\{ \frac{f(N^*)}{f(x)} \right\}}{1 - \left\{ \frac{f(N^*)}{f(x)} \right\}} + \frac{\frac{f(N^*)}{f(x)} - \frac{g(N^*)}{g(x)}}{1 - \left\{ \frac{f(N^*)}{f(x)} \right\}} \right]$$

$$= \frac{f'(\mu)}{g'(\mu)} \left[1 + \frac{\frac{f(N^*)}{f(x)} - \frac{g(N^*)}{g(x)}}{1 - \left\{ \frac{f(N^*)}{f(x)} \right\}} \right]. \quad (4)$$

من (2) نعلم أن العامل الأول في الطرف الأيمن سيكون قريباً من L كلما اختير N^* كبيراً بما فيه الكفاية. إذن نستطيع إثبات أن (3) صحيحة ببرهنة أن:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{g(N^*)}{g(x)} - \frac{f(N^*)}{f(x)}}{1 - \left\{ \frac{f(N^*)}{f(x)} \right\}} = 0. \quad (5)$$

ولكن هذا ينتج مباشرة من افتراضنا أن:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty.$$

لاحظ أنه أولاً اختير N^* بحيث إنه كلما كان $\mu > N^*$ فإن $\frac{f'(\mu)}{g'(\mu)}$ يكون قريباً من L. إذن بعد تثبيت N^*، نختار N أكبر من N^* حيث إنه كلما كان $x > N$ ، فإن الكسور في (5) تكون قريبة من الصفر.

مثال 6.12:

أحسب $\lim_{x \to \infty} (\log x)^n / x^\varepsilon$ عندما يكون $\varepsilon > 0$ و n عدداً صحيحاًموجباً.

نجري الحسابات التالية:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^n}{x^\varepsilon} = \lim_{x \to \infty} \frac{n (\log x)^{n-1} \left(\frac{1}{x} \right)}{\varepsilon x^{\varepsilon - 1}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{n (\log x)^{n-1}}{\varepsilon x^{\varepsilon}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{n (n - 1) (\log x)^{n-2} \left(\frac{1}{x} \right)}{\varepsilon^{2} x^{\varepsilon - 1}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{n (n - 1) (\log x)^{n-2}}{\varepsilon^{2} x^{\varepsilon}}$$

$$\vdots$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{n! (\log x)^{0}}{\varepsilon^{m} x^{\varepsilon}}$$

$$= 0.$$

إن التساوي الأول ناتج ومُبرّر بـواسطة النـظرية 6.8، أمـا التساوي الثـاني فهو اعـادة كتابـة جبرية فقط. وقد استتبع ذلك بتطبيقات أخرى للنظرية 6.8، ثم بإعادة كتابة جبرية وهكذا.

مثـال 6.13:

أحسب $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x}$ عندما يكون n عدداً صحيحاً موجبـاً. بإعـادة تطبيق النـظرية 6.8 عدداً من المرات يساوي n، نحصل على:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

هناك أشكال أخرى غير محددة مثل 0^0 و ∞^0 و $0 . \infty$. ولكن هذه الأشكال لا تتطلب تنوعاً آخر لقاعدة هُوبيتال، بدلاً من ذلك يتم حساب هذه الأشكال بإعادة كتابتها في أحد الأشكال غير المحددة السابقة.

نوضح هذه التقنيّة في المثالين التاليين.

مثـــال 6.14:

أحسب $\lim_{x\to 0^+} x^x$ لنفرض أن $y = x^x$ ومن ذلك

$\log y = \frac{(\log x)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$. بتطبيق النظرية 6.7 للكسر الأخير، نحصل على:

$$\lim_{x\to 0+} \log y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0+} y = \lim_{x\to 0+} e^{\log y} = e^{\lim (\log x)} = e^0 = 1.$$

مثـــال 6.15:

بيِّن أنّ $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. لندع n تأخذ أي قيمة بدلاً من الأعداد الصحيحة فقط، يكون لدينا خارج قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق وبذلك نستطيع تطبيق نظرية 6.8.

لنفرض أن $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ومن ذلك فإن:

$$\log y = x \log\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)\right) = \log\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)\right) / \left(\frac{1}{x}\right)$$

باستخدام النظرية 6.8:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right) / \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

وهكذا:

$$\lim_{x\to\infty} \log y = 1,$$

ومن ذلك

$$\lim_{x\to\infty} y = e^1 = e.$$

تمارين 6.6

1 ـ أعط تفاصيل لبرهان النظرية 6.7 في الحالة الآتية:

$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ تتضمّن $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

احسب النهايات التالية في التمرينات من 2 إلى 18:

- 2 $$\lim_{x\to 0} \left[\frac{x^2}{[\log(1+x)]^2} \right]$$

- 3 $$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{3x^3 - x + 6}{x^3 + x^2 + 5} \right]$$

- 4 $$\lim_{x\to\pi} \left[\frac{1 + \cos x}{\sin 2x} \right]$$

- 5 $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\log x}$$

- 6 $$\lim_{x\to 1} \left[\frac{x^3 - 3x + 1}{x^4 - x^2 - 2x} \right]$$

$$\lim_{x\to 0+} (x^2 \log x)$$ - ٧

$$\lim_{x\to 0+} x^{\sin x}$$ - ٨

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$$ - ٩

$$\lim_{x\to 0+} \left(\cos \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$ - ١٠

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} \right)$$ - ١١

عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً.

$$\lim_{n\to \infty} \left(\frac{\log n}{n^2} \right)$$ - ١٢

$$\lim_{n\to \pi} \frac{e^n}{\pi^n}$$ - ١٣

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{x\, e^x - \sin x}{\sin^2 x} \right]$$ - ١٤

$$\lim_{x\to 1} \left[\frac{\log x}{x^2 - 4x + 3} \right]$$ - ١٥

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}$$ - ١٦

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{x^2}{1 - \cos x} \right]$$ - ١٧

$$\lim_{x\to \infty} = \frac{e^{2n}}{n^2}$$ - ١٨

الفصل السابع

تكامل ريمان

The Riemann Integral

7.1 مجاميع ريمان والدوال القابلة للتكامل

Riemann Sums and Integrable Functions

إن الموضوع الرئيسي لهذا الباب مألوف للطالب في منهج مبادىء حساب التفاضل والتكامل، حيث يقدم عادة التكامل بالاستعانة بالمجاميع العليا والسفلى.

وهنا نطور النظرية انطلاقاً من تعريف مختلف، يستخدم نمطاً أعم من المجاميع المقرّبة. وفي البند 7.3 نبين أن تكامل ريمان الذي نستنتج مكافىء لتكامل داربو (Darboux) الذي يعرّف بواسطة المجاميع العليا والسفلى.

وهذا يسمح لنا بالاستفادة من حقيقة أن بعض خواص التكامل تُبرهن بسهولة عند الاستعانة بمجاميع ريمان في حين يكون من الأسهل اثبات بعض الخواص الأخرى بالاستعانة بمجاميع داربو. ووفقاً لهذا التناول الثنائي نعطي برهانين للنظرية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل وهي النتيجة التي تؤسس للترابط بين المشتقة والتكامل.

نفرض أن f دالة يحتوي نطاقها الفترة المغلقة $[a, b]$. والتجزيء (Partition) P للفترة $[a, b]$ هو الفئة العددية $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ ، التي تحقق المتباينات:

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ، ويُعرّف معيار (norm) التجزيء P الذي يرمز له بالرمز $\|P\|$ بأنه:

$$||P|| = \max \{|x_k - x_{k-1}| : \quad k = 1 ، 2 ، \ldots ، n\}.$$

وبذلك فإن P يحدد n من الفترات الجزئية للفترة $[a, b]$ ، يكون طول أكبرها هو $||P||$ ، والفترة الجزئية $[x_{k-1} ، x_k]$ تسمى بالفترة الجزئية رقم k (المحددة بالتجزيء P). وفي كل فترة من الفترات الجزئية الـ n نختار عدداً وليكن μ_k في $[x_{k-1} ، x_k]$ ونكوّن المجموع:

$$P(f, \mu) = \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)(x_k - x_{k-1}).$$

ويسمى هذا المجموع بمجموع ريمان للدالة f على $[a, b]$. ومن بعض ما نعلمه عند حساب التكامل نستطيع فوراً معرفة أن $P(f, \mu)$ يعطي تقريباً مساحة المنطقة بين منحني الدالة f والمحور الأفقي (بالطبع، إذا كانت f غير متصلة في $[a, b]$ فقد يكون من الصعب التفكير في منحني f بوصفه يمثل حدوداً لمثل هذه المنطقة).

وهناك تفسير آخر يتميز بأنه خالي من الارتباط الهندسي أو الصوري وهو أن $P(f, \mu)$ يمثل نوعاً من «القيمة المتوسطة» للدالة f على $[a, b]$. ويمكن ملاحظة ذلك فيما يلي:

$$P(f ، \mu) = (b - a) \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k) \frac{(x_k - x_{k-1})}{(b - a)}.$$

وفي المجموع فإن كلاً من الصور $f(\mu_k)$ مضروب في الكسر $\frac{(x_k - x_{k-1})}{(b - a)}$ الذي يمثل جزءاً كسرياً من $[a, b]$ حيث اختير فيه العدد μ_k. وبذلك فإن المجموع هو المتوسط الموزون للقيم $f(\mu_1) ، \ldots ، f(\mu_k)$ من مدى f. ثمّ نضرب هذا المتوسط الموزون في الطول الكلي للفترة $[a, b]$ لنحصل على مجموع ريمان $P(f, \mu)$. ولذا فمن الطبيعي أن نتوقع أن $P(f ، \mu) / (b - a)$ يعطي متوسطاً لقيم الدالة f على $[a, b]$. ويكون هذا المتوسط بمثابة أفضل دليل لسلوك f إذا كان التجزيء P يحدد فترات جزئية «صغيرة» فقط ولذا سنختبر سلوك $P(f, \mu)$ عندما يؤول $||P||$ إلى الصفر.

تعريف 7.1:

يقال بإن الدالة f قابلة للتكامل وفقاً لريمان على $[a, b]$ إذا كان: $\lim_{||p|| \to 0} P(f, \mu)$

موجودة، وفي هذه الحالة يرمز إلى قيمة النهاية بالرمز $\int_a^b f$ وتسمى بتكامل ريمان للدالّة f على $[a, b]$.

وقبل الاستمرار في دراستنا، يجب الاعتراف بأن هذا التعريف لا معنى له في الوقت الحاضر؛ لأن مفهوم النهاية $\lim_{\|P\| \to 0} P(g, \mu)$ الذي بني عليه التعريف هو مفهوم جديد تماماً علينا. وهي بالتأكيد ليست نهاية متتالية كما أنها ليست نهاية دالة؛ لأن $P(f, \mu)$ ليست دالة في المتغير $\|P\|$. ولتقدير هذا التأكيد الأخير، نأخذ في اعتبارنا حقيقة أن لقيمة معطاة $\|P\|$ يمكن أن توجد كثير من التجزئيات للفترة $[a, b]$ التي يكون طول أكبر فتراتها الجزئية هو $\|P\|$. على سبيل المثال، يمكن تجزيء الفترة $[0, 1]$ بالتجزيئات المختلفة التالية:

$$P_1 = \left\{0 ، \frac{1}{3} ، \frac{2}{3} ، 1\right\},$$

$$P_2 = \left\{0 ، \frac{1}{3} ، \frac{1}{2} ، \frac{3}{4} ، 1\right\},$$

$$P_3 = \left\{0 ، \frac{1}{5} ، \frac{2}{5} ، \frac{1}{2} ، \frac{2}{3} ، 1\right\},$$

وعندئذ فإن $\|P_1\| = \|P_2\| = \|P_3\| = \frac{1}{3}$ و

وعلاوة على ذلك، فلكل تجزيء للفترة $[a, b]$ له المعيار المعطى $\|P\|$ توجد طرق كثيرة لاختيار النقط $\{\mu_k\}_{k=1}^{n}$ في الفترات الجزئية الـ n. وبالتالي فإن قيمة $\|P\|$ لا تحدد قيمة المجموع $P(f, \mu)$، وهكذا من الضروري تعريف مفهوم النهاية الذي استخدم في التعريف السابق.

تعريف 7.2:

تعني المقولة «$\lim_{\|p\| \to 0} P(f, \mu) = I$» أنه إذا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد موجب δ بحيث يكون لكل تجزيء P للفترة $[a, b]$ بمعيار $\|P\| < \delta$ ولأي اختيار للنقط $\{\mu_k \in [x_{k-1}, x_k] ، k = 1 ، \dots ، n\}$ تتحقق المتباينة

$$|P(f, \mu) - I| < \varepsilon.$$

وعادة يكون التحقق المباشر من وجود النهاية $\lim_{\|p\|\to 0} P(f, \mu)$ على مثال محدد أمراً في غاية الصعوبة. غير أن لهذا التعريف للتكامل $\int_a^b f$ ميزات إيجابية مؤكدة لتطوير النظرية. وفي البند 7.3 سنثبت صياغة مكافئة للنهاية $\lim_{\|p\|\to 0} P(f, \mu)$ أسهل في استخدامها للتحقق من قابلية تكامل أمثلة خاصة من الدوال. ومع ذلك، ففي الوقت الحاضر، نستطيع اختبار قابلية التكامل لمثالين بسيطين.

مثال 7.1:

إذا كانت f دالة ثابتة على $[a, b]$ ولنقل $f(x) = C$ ، فإن f قابلة للتكامل على $[a, b]$ و $\int_a^b f = C(b - a)$.

ولإثبات هذا التأكيد نلاحظ أنه لأي مجموع من مجاميع ريمان يكون:

$$P(f, \mu) = \sum_{k=1}^{n} C(x_k - x_{k-1}) = C\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})$$

$$= C(x_n - x_0) = C(b - a)$$

وبذلك فإنه للعدد المعطى $\varepsilon > 0$ فإنّ المتباينة:

$\left|P(f, \mu) - C(b - a)\right| < \varepsilon$ نتحقق ببداهة. وبذلك فإن

$\lim_{\|p\|\to 0} P(f, \mu) = C(b - a)$.

مثال 7.2:

إذا كان:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{if} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ون g غير قابلة للتكامل على أية فترة $[a, b]$.

لإثبات أن g لا يمكن تكاملها نأخذ $\varepsilon = \frac{(b-a)}{2}$ ونستخدم كثافة الأعداد القياسية (المنطقة) والأعداد غير القياسية (اللامنطقة). لأي تجزيء P، مهما كان P صغيراً، تحتوي كل فترة جزئية محددة بهذا التجزيء P ـ بالضرورة ـ على أعداد قياسية وأعداد غير قياسية، ولتكن:

$\mu''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ، $\mu'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ حيث μ'_k في $\mathbb{Q}$، μ''_k في $\sim\mathbb{Q}$.

عندئذ يكون:

$$P(g, \mu') = \sum_{k=1}^{n} g(\mu'_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a$$

$$P(g, \mu'') = \sum_{k=1}^{n} g(\mu''_k)(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

وبما أنّ الفرق بين العددين $P(g, \mu')$ ، $P(g, \mu'')$ هو $(b-a)$ من الوحدات، فلا يوجد ذلك العدد I الذي يمكن أن يكون الفرق بينه وبين أي مجموع من المجموعين أصغر من $\frac{(b-a)}{2}$. وبذلك فإن النهاية $\lim_{\|P\|\to 0} P(g, \mu)$ غير موجودة، ومن ثم فإن g غير قابلة للتكامل في $[a, b]$.

إن الرمز $\int_a^b f(x)\, dx$ مألوف في حساب مبادىء التفاضل والتكامل للرمز إلى قيمة التكامل. وعلى الرغم من أننا نستخدم الرمز المختصر $\int_a^b f$ في مناقشاتنا النظرية، فإن الرمز الأطول $\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)$ له ميزة خاصة عند العمل على دالة معينة. ولا يجب أن تنشأ أية بلبلة عند استخدام هذا الرمز في الأمثلة والتمارين.

تمارين 7.1

أثبت في التمارين من 1 الى 5 أن f قابلة للتكامل على فترة نطاقها $[a, b]$ وتحقق من قيمة $\int_a^b f$.

1 ـ على $[0,1]$ ، تكون:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = \frac{1}{2} , \\ 0 & , \quad x \neq \frac{1}{2} , \end{cases}$$ ، $\int_0^1 f = 0.$

2 ـ على $[0,1]$ ، تكون:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \text{ أو } 1, \\ 0 & , \quad \text{في أي مكان آخر} ; \end{cases}$$ ، $\int_0^1 f = 0.$

3 ـ على $[0,1]$ ، تكون:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \dots \\ 0 & , \quad \text{في أي مكان آخر} \end{cases}$$ ، $\int_0^1 f = 0.$

4 ـ على $[0, 2]$ ، تكون:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -2 & , \quad 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$$ ، $\int_0^2 f = -1.$

5 ـ على $[0,2]$ ، تكون:

$$f(x) \begin{cases} 2 & , \quad 0 \leqslant x < 1; \\ 5 & , \quad x = 1, \\ 0 & , \quad 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$$ ، $\int_0^2 f = 3.$

6 ـ على $[0,1]$ تكون:

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & x \in \left(\frac{3}{4} , 1 \right] \cup \left(\frac{3}{8} , \frac{1}{2} \right] \cup \left(\frac{3}{16} , \frac{1}{4} \right] \cup \dots, \\ -1 , & x \in \left(\frac{1}{2} , \frac{3}{4} \right] \cup \left(\frac{1}{4} , \frac{3}{8} \right] \cup \left(\frac{1}{8} , \frac{3}{16} \right] \cup \dots ; \end{cases}$$

$\int_0^1 f = 0.$

- أثبت أنه: إذا كانت f قابلة للتكامل على [0,1] ، فإن:

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f.$$

- معطى أن $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ و f قابلة للتكامل على [0, 1] أثبت أن:

$$\lim_n \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} = \int_0^1 f.$$

- معطى أن $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ و f قابلة للتكامل على [0, 1] أثبت أن:

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - 3n} = \int_0^1 f.$$

7.2 الخواص الأساسية

بما أننا نتعامل مع مفهوم للنهاية جديد كلياً، يجب البدء بإثبات نتائج أساسية مثل وحدانية قيمة النهاية وخاصية الانغلاق الجبري. وخلال هذا الباب سنختصر عبارة «f قابلة للتكامل وفقاً لريمان» إلى «f قابلة للتكامل». وفي الأبواب الأخيرة سندرس نمطاً آخر من التكاملات، غير أنه حتى الحين لا يجب أن ينشأ أي سوء فهم بهذا الصدد.

نظرية 7.1:

إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على [a, b] ، فإن قيمة $\int_a^b f$ وحيدة (unique).

البرهان:

نفرض أن $\lim_{\|p\| \to 0} P(f, \mu) = I$ ، وليكن J عدداً لا يساوي I . نبين أن J لا يمكن أن يكون نهاية P(f, μ) ، باستخدام $\varepsilon = \frac{|I - J|}{2}$. وحيث إن ε هو نصف المسافة بين J ، I ينتج أن الفترتين (J − ε ، J + ε) ، (I − ε ، I + ε) لا تتقاطعان.

وعندما يكون P تجزئياً للفترة $[a, b]$ بمعيار $\|P\|$ صغير بدرجة كافية، فإن $P(f, \mu)$ تكون في الفترة $(I - \varepsilon ، I + \varepsilon)$ وذلك لأي اختيار للأعداد $\{\mu\}_{k=1}^{n}$. عندئذ $P(f, \mu)$ ليست في $(J - \varepsilon , J + \varepsilon)$ ولذا فإن $|P(f, \mu) - J| \geqslant \varepsilon$ مهما كان $\|P\|$ صغيراً بأية درجة. ومن ثم فإن: $\lim_{\|p\|\to 0} P(f, \mu)$ لا يمكن أن تساوي J.

مفترض 7.1:

إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على $[a, b]$ فإن f محدودة على هذه الفترة.

البرهان:

نفرض أن f معرّفة، ولكنها ليست محدودة على $[a, b]$ ، ونفرض أن I أي عدد. نؤكد أنه مهما كان المعيار $\|P\|$ صغيراً، فإنه من الممكن اختيار $\{\mu_k\}_{k=1}^{n}$ بحيث يكون $|P(f, \mu)| > |I| + 1$ وهذا ما يؤدي إلى التالي: $|P(f, \mu) - I| > 1$. نفرض أن P أي تجزيء للفترة $[a, b]$ عندئذ فإن f يجب أن تكون غير محدودة على الأقل على احدى الفترات الجزئية المحددة بالتجزيء P، ولنقل، الفترة $[x_{m-1} ، x_m]$. ولـ $k \neq m$ ، نختار الأعداد $\{\mu_k\}_{k=1}^{n}$ التي تحقق المتباينات $x_{k-1} \leqslant \mu_k \leqslant x_k$ ، بأية طريقة.

وهكذا حددنا العدد: $|I| + \sum_{k\neq m}^{n} |f(\mu_k)| (x_k - x_{k-1})$.

والآن نستعين بلا محدودية f على $[x_{m-1} ، x_m]$ لاختيار μ_m بحيث إن:

$$|f(\mu_m) (x_m - x_{m-1})| > 1 + |I| + \sum_{k\neq m} |f(\mu_k)| (x_k - x_{k-1}).$$

وبذلك فإن الحد رقم m يكون الحد ذا التأثير الأكبر في المجموع $P(f, \mu)$. ونحصل على $|P(f, \mu)| > |I| + 1$. ومن ثم فإن $\lim_{\|p\|\to 0} P(f, \mu)$ لا يمكن أن توجد، ولذا فإن f ليست قابلة للتكامل على $[a, b]$.

نظرية 7.2:

إذا كانت كل من f, g دالتين قابلتين للتكامل على $[a, b]$ ، وكان c عدداً ما فإن $f + g$ و cf أيضاً قابلتان للتكامل على $[a, b]$. وعلاوة على ذلك فإن:

$$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g,$$

و

$$\int_a^b c\,f = c \int_a^b f.$$

البرهان :

نفرض أن $\varepsilon > 0$ ونختار العددين الموجبين δ_f ، δ_g بحيث أن :

$\|P\| < \delta_f$ يؤدي إلى $\left|P(f, \mu) - \int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

و

$\|P\| < \delta_g$ يؤدي إلى $\left|P(g, \mu) - \int_a^b g\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

والآن نعرّف $\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$. وهذا يضمن لنا أنه إذا كان $\|P\| < \delta$ فإن :

$$\begin{aligned}\left|P(f+g, \mu) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \left[f(\mu_k) + g(\mu_k)\right] (x_k - x_{k-1}) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right)\right| \\ &= \left|\int_a^b f(\mu_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f + \sum_{k=1}^{n} g(\mu_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b g\right| \\ &\leqslant \left|P(f, \mu) - \int_a^b f\right| + \left|P(g, \mu) - \int_a^b g\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

ومن ثم تكون $f + g$ قابلة للتكامل و:

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

وتكون قابلية $c f$ للتكامل واضحة إذا كان $c = 0$ ولذا نفرض أن $c \neq 0$ ونختار δ بحيث أن $\|P\| < \delta$ يؤدي إلى:

$$\left|P(f, \mu) - \int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

عندئذ $\|P\| < \delta$ يؤدي أيضاً إلى:

$$\left|P(cf, \mu) - c\int_a^b f\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} cf(\mu_k)(x_k - x_{k-1}) - c\int_a^b f\right|$$

$$\leqslant |c| \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)(x_k - x_{k-1}) - c\int_a^b f\Big|$$

$$< |c|\left(\varepsilon / |c|\right)$$

$$= \varepsilon.$$

وبذلك فإن $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.

وتنتج الآن قابلية $f - g$ للتكامل من الحالتين السابقتين بالأخذ في الاعتبار $f + cg$ مع $c = -1$.

وعلى الرغم من أن النظرية 7.2 قد صيغت وبرهنت لمجموع دالتين، فإنه يمكن تعميمها على مجموع m من الدوال بالاستعانة بالاستقراء الرياضي (انظر تمرين 7.2.5). وهناك نوع آخر لخاصية الجمع يمكن إثباتها لتكامل ريمان. ففي النظرية التالية نأخذ في اعتبارنا دالة واحدة فقط ولكن تكاملها يحسب على فترتين متجاورتين ومن ثم تُجمع النتيجتان.

نظرية 7.3:

إذا كانت الدالـة f قابلة للتكـامل عـلى $[a, b]$ وعلى $[a, b]$ فـإن f قابلة للتكـامل عـلى $[a, c]$ و:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

البرهان:

أي تجزيء P على $[a, c]$ يحدد التجزيئين P_1, P_2 على $[b, c]$ و $[a, b]$ عـلى الترتيب، وإذا لم تكن b إحدى نقط التجزيء P، فإنه يمكن أن تكـون موجـودة بين x_{j-1}، x_j حيث j هو أصغر عدد صحيح بحيث يكون $b \leqslant x_j$.

في مجموع ريمان $P(f, \mu)$ ، نختار العدد μ_j من $[x_{j-1}, x_j]$ ، وقد يكون لدينا إمـا $\mu_j \in [x_{j-1}, b]$ أو $\mu_j \in [b, x_j]$.

وفي الحالة الأولى يمكننا أن نكتب:

$$P(f, \mu) = \sum_{k=1}^{j-1} f(\mu_k)(x_k - x_{k-1}) + f(\mu_j)(b - x_{j-1})$$

$$- f(b)(x_j - b) + f(\mu_j)(x_j - b)$$

$$+ f(b)(x_j - b) + \sum_{k=j}^{n} f(\mu_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= P_1(f, \mu) + \left[f(\mu_j) - f(b)\right](x_j - b) + P_2(f, \mu).$$

وبالمثل، إذا كان μ_j في $[b, x_j]$ يمكننا أن نكتب:

$$P(f, \mu) = P_1(f, \mu) + \left[f(\mu_j) - f(b)\right](b - x_{j-1}) + P_2(f, \mu).$$

وإذا كانت $f(x) < k$ في $[a, b]$ نحصل في كل من الحالتين على:

$$\left|P(f, \mu) - P_1(f, \mu) - P_2(f, \mu)\right| \leqslant 2k\,||P||$$

لأن $b - x_{j-1} < x_j - x_{j-1} \leqslant ||P||$ و $x_j - b < x_j - x_{j-1} \leqslant ||P||$.

وإذا كـان $\varepsilon > 0$ فإن قـابلية f للتكـامل عـلى $[a, b]$ وعلى $[b, c]$ تمكّننـا من اختيار عدد موجب δ بحيث إن $||P_2|| < \delta$ ، $||P_1|| < \delta$ يؤديان إلى :

$$\left|P_1(f, \mu) - \int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad \left|P_2(f, \mu) - \int_b^c f\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ويمكننا أيضاً أن نختار δ أصغر من ذلك إذا تطلّب الأمر، بحيث يكون

$\delta < \frac{\varepsilon}{(6k)}$. الآن وبما أنّ :

$||P_1|| \leqslant P$ ، $||P_2|| \leqslant ||P||$ نرى أن :

$||P|| < \delta$ يؤدي إلى :

$$\left|P(f, \mu) - \left(\int_a^b f + \int_b^c f\right)\right| \leqslant \left|P(f, \mu) - P_1(f, \mu) - P_2(f, \mu)\right|$$

$$+ \left|P_1(f, \mu) - \int_a^b f\right| + \left|P_2(f, \mu) - \int_b^c f\right|$$

$$< 2k\,||P|| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

ومن ثم فإن :

$$\lim_{||p|| \to 0} P(f, \mu) = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

والخاصية التالية مشابهة (مناظرة) للمفترضين 2.2 و 2.1 . وهناك أيضاً نتيجة مشابهة لنهـايات الدالة . والفكرة العامة هي أننا اذا حسبنا نهاية صيغـة ما محـدودة (من أعلى أو من أسفـل)، فإن نفس الحد يحد أيضاً قيمة النهاية (انظر أيضاً تمرين 7.2.4).

نظرية 7.4:

إذا كان كل من f, g قابلة للتكامل على $[a, b]$ وكانت $f(x) \leqslant g(x)$ لكل x بـ $[a, b]$ ، فإن:

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

البرهان:

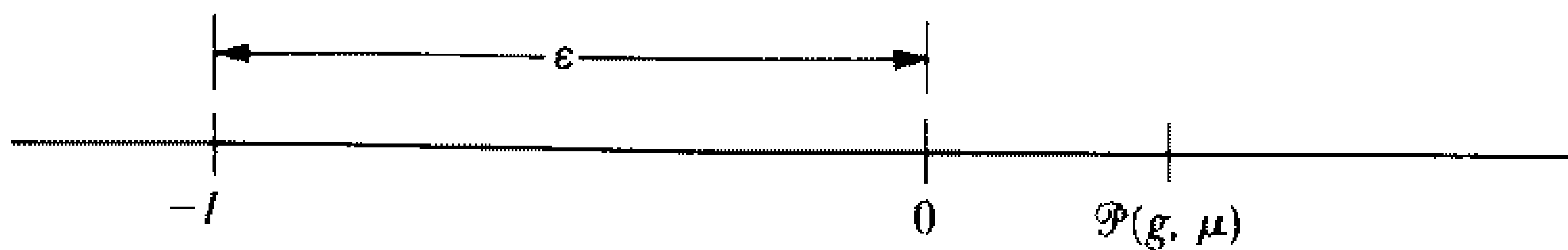
في البداية ندرس الحالة التي تكون فيها $f(x)$ مطابقة للصفر. عندئذ تكون $g(x) \geqslant 0$ على $[a, b]$ ، عندئذ لكل مجموع من مجاميع ريمان يكون $P(g, \mu) \geqslant 0$. وإذا كان $I < 0$ ، $\varepsilon = -I$ فليس من الممكن الحصول على $|P(g, \mu) - I| < \varepsilon$ ؛ لأن البعد بين $P(g, \mu)$ وبين I يساوي على الأقل $|I|$ (أنظر شكل 7.1).

والآن ندرس الحالة العامة التي فيها تكون f دالة اختيارية قابلة للتكامل و $f(x) \leqslant g(x)$.

نعرّف $h(x) = g(x) - f(x)$.

من الواضح أن $h(x) \geqslant 0$. ووفقاً للنظرية 7.2 تكون h قابلة للتكامل على $[a, b]$ ، ولهذا فإن الحالة الأولى من هذا البرهان تؤكد لنا أن:

$$0 \leqslant \int_a^b h = \int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f.$$



كان أحد التفسيرات المبررة للتكامل هو نهاية المتوسطات الموزونة لقيم من مدى f. وعند أخذ متوسط فئة كبيرة من الأعداد، يمكن تغيير قيم قليلة دون تغيير المتوسط كثيراً. وهذا صحيح لـ $P(f, \mu)$ ولقيمة التكامل الناتج، أي أن $f(x)$ يمكن أن تتغير عند عدد

محدود من الأعداد x في $[a, b]$ دون تغيير قابلية f للتكامل أو قيمة تكاملها. وقد وضحت هذه الخاصية في تمارين 7.1.1-7.1.5.

نظرية 7.5:

نفرض أن f دالة قابلة للتكامل على $[a, b]$ وأن $g(x) = f(x)$ لكل النقط فيما عدا عند عدد محدود من النقاط في $[a, b]$، عندئذ تكون g أيضاً قابلة للتكامل على $[a, b]$ ويكون $\int_a^b g = \int_a^b f$.

البرهان:

يكفي أن نثبت النظرية لتلك الحالة التي تختلف فيها g عن f في نقطة واحدة بالضبط في $[a, b]$؛ لأنه يمكن جعل f تتغير n تغيراً بتغيير قيمتها في نقطة واحدة وتكرار عملية الاثبات n مرة. ولذا نفرض أن $g(x) = f(x)$ لكل قيم x في $[a, b]$ فيما عدا عند نقطة واحدة وهي z أي لكل قيم x في $[a, b] \sim \{z\}$، ولأي تجزيء P يمكن أن توجد z على الأكثر في فترتين جزئيتين (قد تكون z نقطة تجزيء)، ولتكن في $[x_{m-1}, x_m]$، $[x_m, x_{m+1}]$ عندئذ فإن:

$$\left|P(g, \mu) - \int_a^b f\right| = \left|P(g, \mu) - P(f, \mu) + P(f, \mu) - \int_a^b f\right|$$

$$\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \left[g(\mu_k) - f(\mu_k)\right](x_k - x_{k-1})\right|$$

$$+ \left|P(f, \mu) - \int_a^b f\right|$$

$$\leqslant \left|g(z) - f(z)\right| (x_m - x_{m-1})$$

$$+ \left|g(z) - f(z)\right| (x_{m+1} - x_m)$$

$$+ \left|P(f, \mu) - \int_a^b f\right|$$

$$\leqslant \left|g(z) - f(z)\right| \left(2 \|P\|\right)$$

$$+ \left|P(f, \mu) - \int_a^b f\right|. \qquad (1)$$

إذا كان $\varepsilon > 0$ نختار $\delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\left(4\left|g(z) - f(z)\right|\right)}$

أيضاً نختار δ صغيرة بدرجة كافية بحيث يؤدي $\|P\| < \delta$ إلى:

$\left|P(f, \mu) - \int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. وبالتعويض عن ذلك في السطر الأخير من (1) نجد أن $\|P\| < \delta$ يؤدي إلى:

$$\left|P(g, \mu) - \int_a^b f\right| < \left|g(z) - f(z)\right| (2\delta) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

تمارين 7.2

1 - معطى أن:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ، \ x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} & ، \ x > 0 \end{cases}$$

بين ما إذا كانت f قابلة للتكامل على كل فترة من الفترات $[-1, 1]$ ، $[-1, 0]$ ، $[0, 1]$.

2 - معطى أن $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx = 1$ ، أثبت أن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right).$$

3 - بفرض أن $f(x) = \sqrt{1 + \sin^4 x}$ تعرِّف دالة قابلة للتكامل، بيِّن أن:

$$\int_0^{\pi} f = \int_{\epsilon}^{2\pi} f \quad ، \quad \int_0^{n\pi} f = n\int_0^{\pi} f.$$

4 - أثبت أنه إذا كانت f قابلة للتكامل على $[a, b]$ و $m \leqslant f(x) \leqslant M$ لكل x في $[a, b]$ فإن:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a).$$

5 - أثبت تعميم النظرية 7.2 على مجموع m من الدوال قابلة للتكامل:

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{m} f_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \int_a^b f_i$$

6 - الدالة σ هي الدالة السُّلَّمية (Step function) على $[a, b]$ إذا وجد تجزيء P على $[a, b]$ بحيث تكون σ ثابتة على كل فترة جزئية مفتوحة (x_{k-1}, x_k) محدّدة بالتجزيء P، فاستعن بالنظرية 7.3 و 7.4 لإثبات أن الدالة السلّمية قابلة للتكامل وأنه إذا كانت $\sigma(x) = y_k$ في (x_{k-1}, x_k) فإن:

$$\int_a^b \sigma = \sum_{k=1}^{n} y_k\,(x_k - x_{k-1}).$$

7 - أثبت نظرية القيمة الوسطى لتكاملات (MVTI): إذا كانت f متصلة وقابلة للتكامل(*) على $[a, b]$ فإنه يوجد عندئذ العدد μ في $[a, b]$ بحيث يكون:

$$f(\mu)\,(b-a) = \int_a^b f.$$

7.3 معيار داربو للقابلية - للتكامل

(The Darboux Criterion for Integrability)

نوضح في هذا البند بالتفصيل سمات وخواص الدوال القابلة للتكامل وفقاً لريمان التي لا تعتمد على قيمة النهاية $\lim_{\|p\| \to 0} P(f, \mu)$. وبهذا المعنى فإن هذا يناظر معيار

(*) سنثبت فيما بعد أن الدوال المتصلة قابلة للتكامل، ومن ثم يصبح هذا الجزء من النص زائداً عن الحاجة.

كوشي لتقارب المتتاليات (Sequential convergence) .

وهذا التوصيف مفيد للغاية في إثبات قابلية دوال من فصول (class) معينة للتكامل. ونستعين به على وجه الخصوص لإثبات أن الدوال المتصلة والدوال المطردة قابلة للتكامل.

ولكي نرسي أساس هذا العمل يجب أن نتفق على بعض الرموز والمصطلحات. نفرض أن f دالة محدودة على $[a, b]$ ، وأن P تجزيء من $[a, b]$. وحيث أن f محدودة على كل فترة جزئية $[x_{k-1}, x_k]$ يمكننا أن نعرّف:

$$m_k = \text{glb}\left\{f(x): x_{k\times 1} \leqslant x \leqslant x_k\right\},$$

$$M_k = \text{lub}\left\{f(x): x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k\right\}.$$

والآن نكوّن المجموع الأسفل والمجموع الأعلى للدالة f بالنسبة إلى P:

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1});$$

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

ونلاحظ أنه لأي مجموع من مجاميع ريمان $P(f, \mu)$ يكون:

$L(f, P) \leqslant P(f, \mu) \leqslant U(f, p)$ ؛ لأن $m_k \leqslant f(\mu_k) \leqslant M_k$ لـ $k = 1 ، \ldots ، n$.

وأيضاً نلاحظ أن المجموعين الأسفل والأعلى قد لا يكونان مجموعي ريمان؛ لأن العددين M_k ، m_k قد لا يكونان في مدى f.

وإذا كان كل من P' ، P تجزيئاً في $[a, b]$ و $P \subseteq P'$ ، فإن P' يسمى تدقيقاً (refinement) لـ P . وهكذا يمكن إجراء تدقيق للتجزيء P بإدخال نقط تجزيء إضافية بين نقط P . ومن الواضح أنه إذا كان P' تدقيقاً لـ P فإن $\|P'\| < \|P\|$. وأيضاً إذا كان P ، P^* تجزيئين في $[a, b]$ فإن لهما تدقيقاً مشتركاً؛ على سبيل المثال فإنّ $P \cup P^*$ تدقيقاً لكل من P^* ، P ؛ لأنه يحتوي على فئتي نقط التجزيئين كلاهما.

نظرية مساعدة 7.1:

إذا كان كل من P^* ، P تجزئياً لـ $[a, b]$ فإن $L(f, P) \leqslant U(f, P^*)$ ، أي أن أي مجموع أسفل لا يمكن أن يزيد عن أي مجموع أعلى.

البرهان:

في البداية نلاحظ أنه مع تزايد نقط التجزيء P، تتزايد المجاميع السفلى وتتناقص المجاميع العليا، أي أنه إذا كان

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

أضفنا نقطة z في $(x_{j-1} ، x_j)$ لنكوّن $P' = P \cup \{z\}$ ، فإن:

$$L(f, P') = \sum_{k \neq j}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) + m' (z - x_{j-1}) + m'' (x_j - z),$$

حيث m'' ، m' هما أكبر حدين أسفلين للدالة $f(x)$ على $[z, x_j]$ ، $[x_{j-1}, z]$ على الترتيب.

وبذلك فإن:

$m' \geqslant m_j$ ، $m'' \geqslant m_j$ (انظر شكل 7.2) ولذا:

$$m'(z - x_{k-1}) + m''(x_j - z) \geqslant m \left[(z - x_{j-1}) + (x_j - z)\right] = m (x_j - x_{j-1}).$$

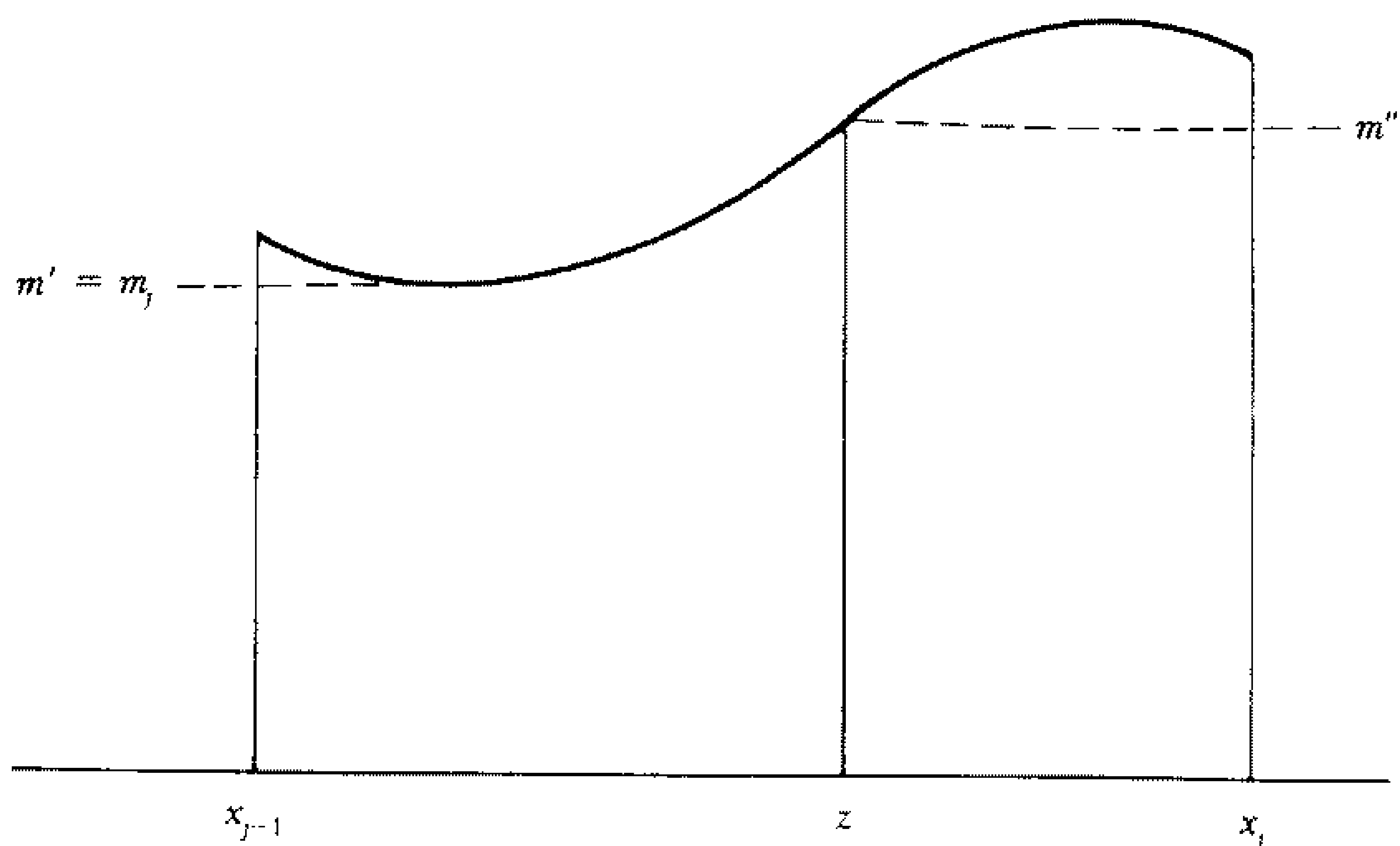
ومن ثم فإن: $L(f, P') \geqslant L(f, P)$. وبالمثل

$$U(f, P') \leqslant U(f, P).$$

والآن نفرض أن P^* ، P أي تجزيئين على $[a, b]$ ، وأن $P' = P \cup P^*$. وحيث إن P' هو تدقيق لكل من P^* ، P فإن الملاحظات السابقة تعطينا

$$L(f, P) \leqslant L(f, P') \leqslant U(f, P') \leqslant U(f, P^*),$$

ونكون قد أثبتنا النظرية المساعدة 7.1.



شكل (7.2)

والنظرية المساعدة 7.1 تؤكد لنا أن فئة كل الحدود السفلى للدالة f محدودة من أعـلى، وأي مجموع أعلى سيكون بمثابة حد أعلى. ولذلك ووفقاً لمسلمة أصغر حد أعلى (LUB) يوجد أصغر حد أعلى لهذه الفئة، ولنَقُلْ، مثلاً:

$$\lambda(f) = \text{lub}_p \left\{L(f, P)\right\}. \qquad (1)$$

وعلاوة على ذلك، فلأي مجموع أعلى، يجب أن يكون:

$$\lambda(f) \leqslant U(f, P). \qquad (1a)$$

وبالمثل فإن فئة كل المجاميع العليا تكون محدودة من أسفـل بكل مجمـوع أسفل، ولـذا يمكننا تعريف $\Lambda(f)$ كما يلي:

$$\Lambda(f) = \text{glb}_p \left\{U(f, P)\right\}. \qquad (2)$$

ولأي مجموع أسفل نحصل على:

$$L(f, P) \leqslant \Lambda(f). \qquad (2a)$$

وينتج من التعريفين (1) و (2) ومن النظرية المساعدة 7.1 أن $\lambda(f) \leqslant \Lambda(f)$ ؛ لأنه إذا كان $\Lambda(f) < \lambda(f)$ ، $\mu = \left[\Lambda(f) + \lambda(f)\right]/2$،

فإنه يمكننا إيجاد مجموع أعلى $U(f,P)$ في الفـترة $\left(\mu ، \Lambda(f)\right)$ ومجموع أسفـل $L(f,P)$ في $\left(\lambda(f) ، \mu\right)$ مما يتناقض مع النظرية المساعدة 7.1.

وبما أنّ مجاميع ريمان تقع بين المجاميع العليا والسفلى فمن الطبيعي أن نتساءل ماذا يحدث عندما يوجد مجموعان أعلى وأسفل قريبان من بعضهما بأية درجة اختيارية؟ أي عندما $\Lambda(f) = \lambda(f)$. نتوقع أن يجبر ذلك مجاميع ريمان على التقارب إلى نهاية تكون مساوية إلى القيمة المشتركة للمقدارين $\Lambda(f)$ ، $\lambda(f)$. وهذا بالضبط ما يحدث وهو ما يمدنا بميزة القابلية للتكامل التي نبحث عنها. وقبل الشروع في برهان هذه النظرية، يجب أن نثبت نظرية مساعدة تعطينا الارتباط الضروري بين مفهوم النهاية عندما $||P||$ يؤول إلى الصفر ومفاهيم الـ glb ، lub لـ (1)، (2).

نظرية مساعدة 7.2:

إذا كانت f دالة محدودة على $[a, b]$ ، فإن:

$$\lim_{||p||\to 0} L(f,P) = \lambda(f)$$

و

$$\lim_{||p||\to 0} U(f, P) = \Lambda(f)$$

أي إذا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد موجب δ بحيث إن $||P|| < \delta$ تتضمن:

$$L(f, P) > \lambda(f) - \varepsilon \text{ ، } U(f, P) < \Lambda(f) + \varepsilon.$$

البرهان:

نفرض أن $|f(x)| < K$ لكل x في $[a, b]$ وان $\varepsilon > 0$. وفقاً للعلاقة (2) يوجد تجزيء $P^* = \{z_i\}_{i=0}^{q}$ للفترة $[a, b]$ حيث يكون $U(f, P^*)$ أصغر من $\Lambda(f) + \frac{\varepsilon}{2}$. نعرّف $\delta = \frac{\varepsilon}{(4qk)}$ ونفرض أن P تجزيء يحقق المتباينة $||P|| < \delta$. ولكي نبين أن $U(f,P) < \Lambda(f) + \varepsilon$ ندرس التدقيق المشترك $P' = P \cup P^*$ بين P ، P^*.

عندئذ فإن بعض نقط التجزيء $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ لـ P هي z_i من P^*، وبعضها لا ينتمي إلى هذه النقط ويمكننا في المجموع $U(f,P')$ فصل الحدود إلى مجموعتين:

(i) $\sum M_k (x_k - x_{k-1})$ حيث لا تحتوي الفترة $[x_{k-1}, x_k]$ أية z_i.

(ii) $\sum M_k (x_k - x_{k-1})$ حيث تكون إما x_{k-1} أو x_k (أو كلاهما) هي z_i.

وحيث إن الحدود من نوع (i) هي أيضاً حدود في المجموع $U(f, P)$ ينتج أن $U(f, P) - U(f, P')$ تتكون بالضبط من الحدود من النوع (ii). ومجموع كل الحدود من النوع (ii) يتكون على الأكثر من $4q - 1$ حداً كل منها لا يفوق:

$$k \|P'\| < k \|P\| < k\delta = \left(\frac{k\varepsilon}{4qk} \right) = \frac{\varepsilon}{(4q)} .$$

وبذلك فإن:

$$U(f, P) - U(f, P') < (2q - 1) \left[\frac{\varepsilon}{(4q)} \right] < \frac{\varepsilon}{2} .$$

و:

$$\begin{aligned} U(f, P) &< U(f, P') + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant U(f, P^*) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \Lambda(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \Lambda(f) + \varepsilon, \end{aligned}$$

وهكذا أثبتنا أن $\lim_{\|p\| \to 0} U(f, P) = \Lambda(f)$

ويمكن اثبات الجزء الثاني $\lim_{\|p\| \to 0} L(f, P) = \lambda(f)$ بطريقة مشابهة.

نظرية 7.6: نظرية داربو للقابلية للتكامل:

الدالة المحدودة f قابلة للتكامل على $[a, b]$ عندما وفقط عندما يكون $\lambda(f) = \Lambda(f)$ ، وفي هذه الحالة يكون $\int_a^b f = \lambda(f) = \Lambda(f)$

البرهان:

نفرض أولاً أن $\lambda(f) = I$ وأن $\varepsilon > 0$ ، بالاستعانة بالنظرية المساعدة 7.2 يمكننا اختيار δ بحيث يؤدي $\|P\| < \delta$ إلى

$$L(f, P) > I - \varepsilon \text{ ، } U(f, P) < I + \varepsilon.$$

وعندئذ لأي اختيار لـ $\{\mu_k\}_{k=0}^{n}$ نحصل على:

$$I - \varepsilon < L(f, P) \leqslant P(f, \mu) \leqslant U(f, P) < I + \varepsilon,$$

ولذا فإن:

$|P(f, \mu) - I| < \varepsilon$ طالما أن $\|P\| < \delta$. ومن ثم فإن f قابلة للتكامل على $[a, b]$ و $\int_a^b f = I$.

والآن نفرض أن f قابلة للتكامل على $[a, b]$ وأن $\int_a^b f = I$ ، ونفرض أن $\varepsilon > 0$. إذا استطعنا أن نبين أنه لتجزيء ما P يكون $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ ، عندئذٍ يمكن الاستنتاج أن $\lambda(f) = \Lambda(f)$ ؛ لأن $\Lambda(f) - \lambda(f) \leqslant U(f, P) - L(f, P)$ ولذا فسنحصل على $\Lambda(f) \leqslant \lambda(f) + \varepsilon$. وبما أن ε أي عدد اختياري موجب فإن ذلك سيؤدي إلى $\Lambda(f) \leqslant \lambda(f)$.

ولكن $\Lambda(f) \geqslant \lambda(f)$ يكون صحيحاً دائماً، لذا نستنتج أن $\Lambda(f) = \lambda(f)$.

نختار $\delta > 0$ بحيث يؤدي $\|P\| < \delta$ إلى $|P(f, \mu) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$.

وحيث إن:

$$M_k = \text{lub}\left\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}$$

و

$$m_k = \text{glb}\left\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}$$

فإنه توجد تلك النقط μ'_k ، μ''_k في $[x_{k-1}, x_k]$ التي تحقق المتباينتين:

$$f(\mu'_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \text{ ، } f(\mu''_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

عندئذ فإن:

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \left[f(\mu'_k) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right] (x_k - x_{k-1})$$

$$= P(f, \mu') + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

$$< I + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = I + \frac{\varepsilon}{2} .$$

وبالمثل فإن:

$$L(f, P) > \sum_{k=1}^{n} \left[f(\mu''_k) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right] (x_k - x_{k-1})$$

$$= P(f, \mu'') - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$< I - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = I - \frac{\varepsilon}{2} .$$

وبالتالي فإن:

$U(f, P) - L(f, P) <$ ، وبذلك يتم البرهان.

عند استخدامنا لنظرية داربو في إثبات أن دالة ما قابلة للتكامل، فإننا نستخدمها في واقع الأمر في الشكل الناتج في برهان النظرية 7.6.

ولكي نسهل من هذا الأمر، نعزل الجزء الذي نريده ونعتبره نظرية مساعدة:

نظرية مساعدة 7.3: معيار داربو للقابلية للتكامل (DIC):

إذا كانت f دالة على $[a, b]$ بحيث إنه يوجد لأي عدد موجب $\varepsilon > 0$ تجزيء P يحقق المتباينة:

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon,$$

فإن f قابلة للتكامل على $[a, b]$.

وحيث أن هذا المنطوق قد تم اثباته كجزء من برهان النظرية 7.6 فليس من الضروري اثباته هنا.

تمارين 7.3

1 - معطى أن $f(x) = x$ و $P_n = \left\{ \frac{k}{n} \right\}_{k=0}^{n}$. أوجد $L(f, P_n)$ و $U(f,P_n)$. ثم بيّن بالاستعانة بالنظرية المساعدة 7.3 أن f قابلة للتكامل على $[0, 1]$.

وأخيراً عيّن $\int_0^1 f$.

2 - معطى أن $f(x) = x^2$ وأن $P_n = \left\{ \frac{k}{n} \right\}_{k=0}^{n}$. كرّر كل ما فعلته في تمرين (1).

3 - معطى أن $f(x) = \frac{1}{(x + 1)}$ و $P_n = \left\{ \frac{k}{n} \right\}_{k=0}^{n}$. بيّن أن:

$\lim_n \left\{U(f, P_n) - L(f, P_n)\right\} = 0$ ، وبذلك تكون قد أثبت أن f قابلة للتكامل على $[0, 1]$. (ارشاد: لا تحاول تبسيط $U(f, P_n)$ أو $L(f,P_n)$ ، وإنما أعمل مع الفرق بينهما).

4 - معطى أن $f(x) = \sin x$ وأنّ $P_n = \left\{ \frac{k\pi}{2n} \right\}_{k=0}^{n}$. بيّن أن f قابلة للتكامل على $\left[0 ، \frac{\pi}{2}\right]$ وذلك كما فعلت في تمرين (3).

التمارين 5-9 تتعلق بالقيمة المطلقة $|f|$ للدالة f. لأي f نقدم الدالتين f^- ، f^+ :

$$f^+(x) = \max \left\{f(x) ، 0\right\}, \quad f^-(x) = \max \left\{-f(x) ، 0\right\}$$

5 - أثبت أنه لأي دالة f تكون:

$f = f^+ - f^-$ و $|f| = f^+ + f^-$.

6 - أثبت أنه إذا كانت f قابلة للتكامل على $[a, b]$ فإن f^+ تكون أيضاً قابلة للتكامل على الفترة نفسها.

(ارشاد: قارن $(M_k - m_k)$ للدالة f بالفرق المناظر لـ f^+).

7 ـ أثبت أنه إذا كانت f قابلة للتكامل على $[a, b]$ فإن $|f|$ قابلة للتكامل على الفترة نفسها.

٨ ـ بيّن بمثال أن $|f|$ يمكن أن تكون قابلة للتكامل ومع ذلك تكون f غير قابلة للتكامل.

٩ ـ أثبت أنه إذا كانت f قابلة للتكامل على $[a, b]$ فإن:

$$\left|\int_a^b f\right| < \int_a^b |f| .$$

7.4 قابلية التكامل للدوال المتصلة

قبل تلخيص التطور في نظريتنا قد يكون من المفيد اكتساب مهارة أكثر في التعود على مجاميع داربو العليا والسفلى والدور الذي تلعبه في تحديد قابلية الدوال للتكامل. وبتذكر ذلك ندرس مثالاً رأيناه في الباب الرابع:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & ، \ x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \\ & \text{و } \dfrac{p}{q} \text{ غير قابلة للاختصار} \\ 0 & ، \ x \in \mathbb{R} \sim \mathbb{Q} \end{cases}$$

نتذكر أن f متصلة عند أي عدد غير قياسي، وغير متصلة عند أي عدد قياسي. والآن نؤكد أن f قابلة للتكامل على أية فترة $[a, b]$ وأن $\int_a^b f = 0$. ولإثبات ذلك نستعين بالنظرية المساعدة 7.3 (معيار داربو للقابلية للتكامل DIC). أولاً تؤكد لنا كثافة الأعداد غير القياسية أن $L(f, P) = 0$ لأي تجزيء P. وبذلك فلأي عدد ε موجب اختياري، نبحث عن ذلك التجزيء P بحيث يكون $U(f, P) < \varepsilon$.

وفي الفترة $[a, b]$ يوجد عدد محدود من النقط $\dfrac{p}{q}$ بحيث يكون

$\dfrac{\varepsilon}{2(a-b)}$ $\dfrac{1}{q} > \dfrac{\varepsilon}{2}$. نفرض أن m هو عدد مثل هذه النقط في

[a, b] ولنأخذ P تجزيئاً بحيث يكون $\frac{\varepsilon}{(4m)} > ||P||$. في المجموع

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

يـوجد عـلى الأكثر 2m من الحـدود حيث $M_k > \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. ولكل حـد من هـذه الحدود لدينا:

$$M_k (x_k - x_{k-1}) < 1 \cdot ||P|| < \frac{\varepsilon}{(4m)} .$$

ولذلك فـإن مجموع هـذه الحدود يكـون أصغر من $\frac{\varepsilon}{2} = \left[\frac{\varepsilon}{(4m)} \right] (2m)$. وفي كـل حد

من الحدود المتبقاة يكون $M_k \leqslant \frac{\varepsilon}{[2(b-a)]}$ ، ولذا فإن مجموعها أصغر من:

$$\left\{ \frac{\varepsilon}{[4(b-a)\}} \right] \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{2} .$$

وهكـذا فإن $U(f, P) < \varepsilon$ ، أي أن معيـار داربو للقـابلية للتكـامـل يؤدي إلى أن f قـابلة للتكامل وأن $\int_a^b f = 0$.

رأينا حتى هذه النقطة أمثلة قليلة جداً يمكن أن نتحقق فيهـا من قابليـة الدوال للتكـامل. وتمدنا النظريتان التاليتان بفئة كبيرة للغاية من مثل هذه الأمثلة.

نظرية 7.7:

إذا كانت الدالة f متصلة على [a, b] فإن f قابلة للتكامل على هذه الفترة المغلقة.

البرهان:

نستعين بمعيار داربـو للقابلية للتكامـل (DIC) لإثبات أنـه لأي عدد مـوجب اختياري ε يوجد ذلك التجزيء P بحيث إن:

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

وفقاً للنظرية 5.5 تكون الدالة المتصلة f متصلة بانتظام على [a, b] . نفرض أن δ موجب بحيث أنه للقيمتين x', x'' في [a, b]:

$$|x' - x''| < \delta \quad \text{يؤدي إلى} \quad |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{(b - a)}.$$

والآن نختار التجزيء P بحيث أن $\|P\| < \delta$ ، ونأخذ الفترة الجزئية ذات الرقم k أي الفترة الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ ثم نختار النقطتين μ'_k, μ''_k في $[x_{k-1}, x_k]$ بحيث يكون:

$$f(\mu'_k) = M_k \text{ ، } f(\mu''_k) = m_k.$$

(نذكر أنه وفقاً للنظرية 5.2 تصل الدالة المتصلة إلى أصغر حد علوي lub وإلى أكبر حد سفلي glb)؛

$$\text{وبما أنّ} \quad |\mu'_k - \mu''_k| \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \|P\| < \delta$$

ينتج أن:

$$M_k - m_k = f(\mu'_k) - f(\mu''_k) < \frac{\varepsilon}{(b - a)} .$$

وبذلك فإن:

$$U(f, P) - L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$
$$< \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \ldots$$

من هنا ووفقاً لمعيار داربو للقابلية للتكامل تكون f قابلة للتكامل.

نظرية 7.8:

إذا كانت الدالة f مطردة (monotonic) على [a, b] فإن f قابلة للتكامل على هذه الفترة المغلقة.

البرهان:

حيث إن f مطردة، تكون إما f أو $-f$ غير تناقصية، ووفقاً للنظرية 7.2 فإنه إذا كانت

احدى هاتين الدالتين قابلة للتكامل فإن الأخرى تكون أيضاً كذلك. ولذا يمكننا الافتراض - للتحديد - أن f غير تناقصية.

وهكذا لأيّة فترة جزئية $[x_{k-1}, x_k]$ من $[a, b]$ تظهر M_k في نقطة النهاية اليمنى، أي أن $M_k = f(x_k)$.

وبالمثل فإن $m_k = f(x_{k-1})$. ولذا إذا كان P أي تجزيء للفترة $[a, b]$ فإن:

$$U(f,P) - L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right](x_k - x_{k-1})$$

$$\leqslant \|P\| \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right]$$

$$= \|P\| \left[f(b) - f(a)\right].$$

والآن إذا كان $\varepsilon > 0$ فإننا ببساطة نختار تجزيئاً P بحيث يكون

$$\|P\| < \frac{\varepsilon}{\left[f(b) - f(a)\right]}.$$

(يمكن أن نفرض أن $f(a) \neq f(b)$ وإلا فإن f تكون ثابتة والنتيجة تكون تافهة). عندئذ فإن $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ ، ولذا وفقاً لمعيار داربو للقابلية للتكامل فإنّ f قابلة للتكامل.

ويمكن توسيع مجمل الدوال التي يمكن إثبات قابليتها للتكامل بالأخذ في الاعتبار النظريتين 7.8 و 7.7 مع النظرية 7.3. على سبيل المثال يمكن أن يكون للدالة عدد من الانفصالات القَفْزيّة (القفزات) التي تؤدي إلى انفصالات في منحنياتها، ولكن لأنها متصلة في الفترات بين الانفصالات، تكون الدالة قابلة للتكامل في كل من هذه الفترات. ومن هنا تسمح لنا النظرية 7.3 باستنتاج أن الدالة قابلة للتكامل في اتحاد هذه الفترات. ومثل هذه الدالة تسمى بالدالة متقطعة الاتصال. ويمكن تعريف مفهوم تقطّع الاطراد (piecewise monotonic) بطريقة مماثلة.

ولتعريف دالة لا تكون متقطعة الاتصال أو متقطعة الاطراد ينبغي الاستعانة بتركيب بنائي خاص (على سبيل المثال دالة درسناها أعلاه والتي تعتمد على كثافة فئتي الأعداد القياسية وغير القياسية). وهذا يخدمنا في خلق الانطباع الصحيح بأن تجمُّع الدوال القابلة للتكامل هو بالفعل كبير للغاية.

تمارين 7.4

1 - أثبت أنّه إذا كانت f متصلة على $[a, b] \sim \{c_i\}_{i=1}^{m}$ فإن f قابلة للتكامل على $[a, b]$.

2 - إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x, & x \neq 0, \\ 3 \quad , & x = 0, \end{cases}$$

فإن $f(x)$ قابلة للتكامل على $[0, 5]$.

3 - إذا كانت $f(x) = m_n x + b_n$ على $[n-1, ، n)$ حيث $n = 1 ، 2 ، .... ، k$ فإن f قابلة للتكامل على $\left[0 ، k - (\frac{1}{2})\right]$.

4 - إذا كانت f متصلة وغير سالبة ولكنها ليست صفراً بالتطابق على $[a, b]$ فإن $\int_a^b f > 0$.

7.5 حاصل ضرب الدوال القابلة للتكامل

أثبتنا في النظرية 7.2 أن فئة الدوال القابلة للتكامل هي فئة مغلقة على عمليات جبرية معينة، وبالتحديد عمليات الجمع والضرب في معاملات ثابتة. ولكي نكمل بلورة خاصيّة الانغلاق الجبري للدوال القابلة للتكامل نثبت الآن النتيجة التالية لضرب الدوال القابلة للتكامل.

نظرية 7.9:

إذا كانت كل من f, g قابلة للتكامل على $[a, b]$ فإن fg قابلة للتكامل على الفترة نفسها.

البرهان:

نثبت المنطوق أولاً لحالة خاصة تكون فيها كل من f, g دالة غير سالبة. نفرض أن **P** أي تجزيء للفترة $[a, b]$، ونفرض أن M_g، M_f، M_{fg} ترمز على التوالي إلى أصغر الحدود العليا للدوال f، g، fg في الفترة الجزئية رقم k $[x_{k-1}, x_k]$. وليس من العسير رؤية أنّ للدوال الموجبة تتحقق $M_{fg} \leqslant M_f M_g$. وبالمثل إذا كان m_{gf}، m_g، m_f هي أكبر الحدود السفلى المُناظرة للدوال المذكورة، وعندئذ فإن $m_{fg} \geqslant m_f m_g$. وبذلك فإن:

$$M_{fg} - m_{fg} \leqslant M_f M_g - m_f m_g. \tag{1}$$

والآن نفرض أن B_g، B_f، هما الحدان العلويان للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ لقيم x في $[a, b]$. نعيد كتابة (1) كما يلي:

$$\begin{aligned} M_{fg} - m_{fg} &\leqslant M_f M_g - m_f M_g + m_f M_g - m_f m_g \\ &= (M_f - m_f) M_g + M_f (M_g - m_g) \leqslant (M_f - m_f) B_g + B_f (M_g - m_g). \end{aligned} \tag{2}$$

وتصح المتباينة (2) لكل حد في المجموع:

$$U(fg, P) - L(fg, P) = \sum_{k=1}^{n} (M_{fg,k} - m_{fg,k}) (x_k - x_{k-1}),$$

حيث كتبنا $M_{fg,k} - m_{fg,k}$ بالدليل k لنشير إلى الحد المناظر للفترة الجزئية رقم k. وبذلك فمن (2) نحصل على:

$$\begin{aligned} U(fg, P) - L(fg, P) &\leqslant B_g \sum_{k=1}^{n} (M_{f,k} - m_{f,k}) (x_k - x_{k-1}) \\ &\quad + B_f \sum_{k=1}^{n} (M_{g,k} - m_{g,k}) (x_k - x_{k-1}) \\ &= B_g \Big[U(f, P) - L(f, P)\Big] + B_f \Big[U(g, P) - L(g, P)\Big]. \end{aligned}$$

يمكننا أن نفرض أنه ليس B_f ولا B_g مساوية للصفر، ووفقاً لمعيار داربو (DIC) إذا كان $\varepsilon > 0$ تسمح لنا قابلية كل من f,g للتكامل بأن نختار P بحيث يكون:

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{2B_g},$$

$$U(g, P) - L(g, P) < \frac{\varepsilon}{2B_f}.$$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$U(fg, P) - L(fg, P) < \varepsilon,$$

ومن ثم وفقاً لمعيار داربو (DiC) نستنتج أن fg قابلة للتكامل.

لإثبات الحالة العامة حيث لا تتطلب فيها الدالتان f, g أن تكونا غير سالبتين، نستعين بالمفترض 7.1 الذي يؤكد لنا أن الدالتين القابلتين للتكامل f, g محدودتان من أسفل، فليكن $f(x) \geqslant K$ ، $g(x) \geqslant L$ لكل x في [a, b].

عندئذ فإن $g - L$ ، $f - K$ غير سالبتين وقابلتان للتكامل، وهكذا يمكن تطبيق الحالة التي أثبتناها لاستنتاج أن $(f - K)(g - L)$ قابلة للتكامل.

وبما إن:

$$fg = (f - K)(g - L) + Kg + Lf + KL$$

وكل حد في الطرف الأيمن قابل للتكامل فإنه ينتج من نظرية 7.2 أن fg أيضاً قابلة للتكامل.

وبتجميع هذه النتيجة الأخيرة مع النظرية 7.2 نحصل على الانغلاق الجبري لفئة الدوال القابلة للتكامل. وينبغي ملاحظة أن هناك شيئاً مفقوداً هنا كان جزءاً من نتيجة النظرية 7.2.

ففي النتيجة السابقة استطعنا إعطاء علاقات صريحة لتكامل مجموع دالتين أو لتكامل حاصل ضرب دالة في معامل ثابت أي:

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad ، \quad \int_a^b cf = c\int_a^b f$$

وفي حالة ضرب دالتين لا توجد علاقة لقيمة التكامل $\int_a^b fg$ ، وهكذا ففي النظرية 7.9 أثبتنا فقط وجود التكامل. وهناك علاقة تعطي تقديراً فظاً لقيمة التكامل $\int_a^b fg$ ولكنها في صورة متباينة، ولذا فهي تمدنا فقط بالحد الذي يمكن أن تصله قيم التكامل. وهذه النتيجة تظهر في صور مختلفة خلال التحليل الرياضي ولذا فلا غرابة إذا وجدت أسماء ثلاثة من كبار الرياضيين قد ارتبطت بهذه المتباينة.

نظرية 7.10 (**متباينة كوشي - بونيا كوفسكي - شوارتز**)(*):

إذا كانت كل من f, g قابلة للتكامل على $[a, b]$ فإن:

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left[\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

البرهان:

ينتج مباشرة من النظرية 7.9، أن كلًّا من g^2 ، f^2 ، $fg,$ دالة قابلة للتكامل.

وأيضاً $\int_a^b f^2 \geqslant 0$ ، $\int_a^b g^2 \geqslant 0$ وفقاً للتمرين 7.2.4. ومن هنا فلا يوجد شك في وجود الجذر التربيعي.

نعرّف الأعداد C ، B ، A كما يلي:

$$A = \int_a^b f^2 \ ، \ B = 2\int_a^b fg \ ، \ C = \int_a^b g^2,$$

ونفرض أن q هي الدالة التربيعية المعرّفة كما يلي:

$$q(x) = Ax^2 + Bx + C$$

ونؤكد أن q غير سالبة؛ لأن:

$$q(x) = x^2\int_a^b f^2 + 2x\int_a^b fg + \int_a^b g^2 = \int_a^b (x^2 f^2 + 2x\, fg + g^2)$$

$$= \int_a^b (xf + g)^2,$$

(*) كوشي (أوغسطين لويس) (1789-1857) عالم رياضيات فرنسي. بونياكوفسكي (فيكتوريا كوفليفتش) (1804-1889) عالم رياضيات روسي. شوارتز (كارل جيرمان) (1843-1921) عالم رياضيات الماني. (ملاحظة المترجم).

وللدالة غير السالبة $(xf + g)^2$ تكامل غير سالب.

ومن الجبر البسيط نتذكر أن $q(x) = 0$ عندما

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

وبما أن $q(x)$ لا تصبح سالبة أبداً فإن المعادلة $q(x) = 0$ لا يمكن أن يكون لها جذران حقيقيان، أي أن $B^2 - 4AC \leqslant 0$. ولكن هذا يعني أن:

$$4\left(\int_a^b fg\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leqslant 0$$

أو

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left[\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

نتيجة 7.10 (متباينة مينكوفسكي):

إذا كانت كل من f, g دالة قابلة للتكامل على $[a, b]$ فإن:

$$\left[\int_a^b (f+g)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

البرهان:

يترك البرهان كتمرين 7.5.3.

وفي النظرية 7.3 أوضحنا أن الدالة القابلة للتكامل على فترتين تكون قابلة للتكامل على اتحاد هاتين الفترتين.

والآن نعكس هذا، بأن نوضح أن القابلية للتكامل على فترة تعني القابلية للتكامل على أية فترة جزئية لها.

مفترض 7.2:

إذا كانت f دالة قابلة للتكامل على $[a, b]$ وكان $[c, d] \subset [a, b]$ ، عندئذٍ تكون f قابلة للتكامل على $[c, d]$.

البرهان:

يترك البرهان كتمرين 7.5.6.

للنتيجة السابقة معكوس جزئي يمكن استخدامه لإثبات القابلية للتكامل لدوالٍ تسلك سلوكاً غير مريح عند نقطتي النهاية لفترة ما:

نظرية 7.11:

إذا كانت f دالة محدودة على [a, b] وقابلة للتكامل على كل فترة جزئية مغلقة للفترة (a, b) عندئذٍ تكون f قابلة للتكامل على [a, b].

البرهان:

نفرض أن $\varepsilon > 0$ ، وأن $|f(x)| \leqslant B$ لكل x في [a, b] . ثم ندع [c, d] فترة جزئية من (a, b) بحيث يكون:

$$a < a + \frac{\varepsilon}{6B} \quad , \quad b - \frac{\varepsilon}{6B} \leqslant d < b.$$

وحيث إن f قابلة للتكامل على [c, d] ، فإن معيار داربو (DIC) يسمح لنا باختيار تجزيء P^* للفترة [c,d]، بحيث يكون $U(f, P^*) - L(f, P^*) < \frac{\varepsilon}{3}$

وعندئذ يكون P تجزيئاً للفترة [a, b] و:

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= (M_1 - m_1)(c - a) + (U(f, P^*) - L(f, P^*)) \\ &\quad + (M_n - m_n)(b - d) \\ &\leqslant 2B(c - a) + \left\{U(f, P^*) - L(f, P^*)\right\} \\ &\quad + 2B(b - d) \\ &< 2B\left(\frac{\varepsilon}{6B}\right) + \left\{\frac{\varepsilon}{3}\right\} + 2B\left(\frac{\varepsilon}{6B}\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

ومن هنا ووفقاً لمعيار داربو (DIC) تكون f قابلة للتكامل على [a, b].

وكتطبيق للنظرية 7.11 ندرس الدالة المعرَّفة بالصيغة $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ عندما $x \neq 0$. هذه الدالة ليست متقطعة الاتصال أو الاطراد على أية فترة تحتوي الصفر، ولكن مع ذلك يمكننا بسهولة توضيح أن f قابلة للتكامل على $[0, 1]$. وبصرف النظر عن كيفية تعريف f عند $x = 0$ فإن f تظل محدودة على $[0, 1]$ ومتصلة على $(c, 1)$ لأي عدد موجب c. وبذلك وفقاً للنظرية 7.7 تكون f قابلة للتكامل على كل فترة (c, d) على $[0, 1]$ ولذا ووفقاً للنظرية 7.11 تكون f قابلة للتكامل على $[0, 1]$.

تمارين 7.5

1 - أثبت أن $\int_0^{\pi} \sqrt{x \sin x}\ dx \leqslant \pi$

2 - أثبت أن $\int_0^{\pi/4} (1 + \tan x) \sqrt{x}\ \sec x\, dx \leqslant \sqrt{\frac{7}{96}}\ \pi$.

4 - أثبت أن $\int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\cos\ x} + x\right)^2 dx \leqslant \left(1 + \sqrt{\frac{\pi^3}{24}}\ \right)^2$.

5 - أثبت أنه إذا كانت f دالة قابلة للتكامل و $|f(x)| \geqslant \delta > 0$ لكل x في $[a, b]$ ، عندئذٍ فإن $\frac{1}{f}$ تكون قابلة للتكامل في $[a, b]$. (ارشاد: افرض أولاً أن f غير سالبة ثم عمّم هذه الحالة على الحالة العامة كما في برهان النظرية 7.9).

6 - أثبت المفترض 7.2.

7 - أثبت نظرية بلِسْ (Bliss's Theorem): إذا كانت كل من g, f متصلة على $[a, b]$ فإن:

$$\int_a^b fg = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\mu'_k)\, g(\mu''_k)\, (x_n - x_{k-1}),$$

حيث μ''_k ، μ'_k نقطتين اختياريتين في الفترة الجزئية $[x_{k-1}$ ، $x_k]$ رقم k. [ارشاد: بَيِّن أنه لـ P الصغير بدرجة كافية يكون الطرف الأيمن للمجموع أصغر من $\frac{\varepsilon}{2}$ مرة من مجموع ريمان $P(fg, \mu')$].

7.6 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

في العديد من مجالات الرياضيات يمكن أن تجد نتيجة مُعيّنة تعتبر نظرية أساسية في هذا المجال. وفي مجال حساب التفاضل والتكامل هناك سبب بسيط لكي تستحق تلك النتيجة التي تُبيّن وتدرس الارتباط بين مفهومي التفاضل والتكامل أن تكون هي النظرية الأساسية. ومن الممكن تفهم أهميّة النظرية الأساسية؛ فبدون هذا الارتباط يصبح تكامل ريمان صعباً ومطولاً للتطبيقات الواسعة التي يعمل عليها. ولكن حل مسائل حساب التفاضل والتكامل يجب أن يكون مبسطاً ولذا فسنشرع فوراً في سرد مصطلحات هذه النتيجة الأساسية وبرهانها.

إذا كانت F و f دالتين بحيث تكون f هي مشتقة F فإن F تسمى بالدالة الأصلية للدالة f (Primitive). وبالطبع يمكن أن يكون للدالة F مشتقة واحدة على الأكثر، ولكن إذا كان للدالة f دالة أصلية فإنه يكون لها كثير من الدوال الأصلية. ومع ذلك وفقاً للنتيجة 6.3 b لنظرية القيمة الوسطى فإن أية دالتين أصليتين للدالة f ينبغي أن تختلف بفارق ثابت فقط.

نظرية 7.12: النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل:

إذا كانت f قابلة للتكامل على $[a, b]$ ، وكانت F هي الدالة الأصلية للدالة f على $[a, b]$ فإن:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

البرهان:

نفرض أن P تجزيء للفترة $[a, b]$ ، وندرس المجموع التالي الذي تُختصر حدوده مع بعضها البعض الا الحدين الأول والأخير:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \left\{F(x_k) - F(x_{k-1})\right\}. \qquad (1)$$

وحيث أن F قابلة للتفاضل على كل فترة جزئية $[x_{k-1}, x_k]$ فإنّه يمكن تطبيق نظرية القيمة الوسطى لنحصل على العدد μ_k في $[x_{k-1}, x_k]$ بحيث يكون:

$$F'(\mu_k) = \frac{[F(x_k) - F(x_{k-1})]}{[x_k - x_{k-1}]},$$

أو:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\mu_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= f(\mu_k)(x_k - x_{k-1}). \qquad (2)$$

وبالتعويض بالطرف الأيمن للعلاقة (2) في (1) نحصل على:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= P(f, \mu),$$

حيث $P(f, \mu)$ هو مجموع ريمان للدالة f بالنسبة إلى P.

وهكذا فقد أثبتنا أنه لأي تجزيء P يمكن اختيار النقط $\{\mu_k\}_{k=1}^{n}$ بحيث تكون قيمة $P(f, \mu)$ هي $F(b) - F(a)$. وهكذا فإن $F(b) - F(a)$ هي القيمة الوحيدة الممكنة لنهاية $\lim_{\|P\|\to 0} P(f, \mu)$. وبما أننا نفترض أن f قابلة للتكامل فإن هذه النهاية يجب أن تكون موجودة ويرمز لقيمتها بالرمز $\int_a^b f$.

ومن ثم فإن:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

ويجب أن نؤكد أن فرض النظرية 7.12 يتضمن افتراض أن f قابلة للتكامل. والنص بأن f هي مشتقة دالة ما F لا يؤدي مسبقاً إلى أن f يجب أن تكون قابلة للتكامل. وهناك مسألة تختبر فيها الطلبة أحياناً في حساب التفاضل والتكامل الأولى يُطرح فيها حساب تكامل ما مثل $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx$. وبالطبع التكامل لا يوجد؛ لأن الدالة المكاملة غير محدودة على $[-1, 1]$. غير أن كثيراً من الطلبة يجدون ـ دون تفكير ـ الدالة الأصلية $F(x) = -x^{-1}$ ثم «يطبقون» النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل لينتج أن التكامل قيمته -2. وينبغي التأكيد على أن $-x^{-1}$ ليست دالة أصلية للدالة x^{-2} في الفترة

$[-1, 1]$ ؛ لأن هاتين الدالتين غير معرّفتين عند $x = 0$. والمثال التالي ليس عرضة لمثل هـذا الانتقاد السابق، ومع ذلك فهو يعطينا دالة هي بمثابة دالة أصلية لمشتقة غير قابلة للتكامل:

مثال 7.3:

$$G(x) = \begin{cases} x^2 (\sin)\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0 \quad , & x = 0, \end{cases}$$

عندئذٍ فإن

$$g(x) = G'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \left(\frac{2}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), \text{if} \neq 0,$$

$$g(0) = \lim_0 \frac{[G(x) - G(0)]}{(x - 0)} = \lim_0 x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

ولذلك فإن G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$، ولكن عامل السعة $\frac{2}{x}$ في الحد الثاني للدالة g(x) يشير إلى أنّ g غير محدودة على أية فترة تحتوي على الصفر. ومن ثم فإن g ليست قابلة للتكامل على $[-1, 1]$ ، على سبيل المثال.

يرد في معظم كتب حساب التفاضل والتكامل الأولية نص النظرية الأساسية في صورة أضعف بعض الشيء، إذْ يفترض أن f متصلة دون النص على أنها قابلة للتكامل كما في النظرية 7.12. والفرض الأقوى مطلوب، كي يمكن الحصول على البرهان من النظرية التالية:

نظرية 7.13:

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ وكانت ϕ معرفة لقيم x في $[a, b]$ بالصيغة $\phi(x) = \int_a^b f$. عندئذ فإن ϕ دالة أصلية للدالة f على $[a, b]$.

البرهان:

نفرض أن c عدد في $[a, b]$ ونتناول بالدراسة العلاقة (خارج قسمة الفرق) التالية:

$$Q_c(h) = \frac{[\phi(c+h) - \phi(c)]}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_a^{c+h} f - \int_a^c f\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_a^c f + \int_c^{c+h} f - \int_a^c f\right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f.$$

وفقاً لنظرية القيمة الوسطى للتكاملات (تمرين 7.2.7) يوجد عدد μ بين c و $c+h$ بحيث يكون:

$$\int_c^{c+h} f = f(\mu)\cdot h$$

وبالتعويض بهذه القيمة في صيغة $Q_c(h)$ نحصل على:

$$Q_c(h) = f(\mu).$$

حيث μ بين c و $c+h$.

وعندما h تؤول إلى الصفر، ينتج أن μ تؤول إلى c، وبذلك فإن

$$\phi'(c) = \lim_{h\to 0} Q_c(h) = \lim_{\mu\to c} f(\mu).$$

وحيث أن f متصلة عند c فإن النهاية السابقة تساوي $f(c)$ ، وبذلك فإن:

$$\phi'(c) = f(c)$$

يمكن استنتاج النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل (للدوال المتصلة) كما يلي.

إنّ الدالة ϕ في الفقرة السابقة هي الدالة الأصلية للدالة المتصلة f، ولذا فإذا كانت F دالة أصلية اختيارية للدالة f فإن $F' = f = \phi'$. وبذلك وفقاً للنتيجة 6.3b لنظرية القيمة الوسطى تختلف $\varnothing$ و F بثابت، ولنقل:

$$F(x) - \phi(x) = C$$

لكل x في $[a, b]$.

بالتعويض بـ a عن x نحصل على :

$$F(a) - \int_a^a f = C,$$

وبذا فإن $C = F(a)$. والآن نعوض بـ b عن x لنحصل على :

$$F(b) - \phi(b) = C = F(a),$$

وهي مشابهة للمعادلة :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f.$$

تمارين 7.6

1 ـ معطى أن:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

أثبت أن f قابلة للتكامل في [0, 2] ولكن ليس لها دالة أصلية هناك. (ارشاد: **انظر** نظرية 6.5).

2 ـ عُرّفت $F(x) = \int_0^x f$ ، حيث f معطاة في المثال 1. هل F متصلة على [0, 2]؟ **وهل** F قابلة للتفاضل على [0,2]؟ وضح اجابتك.

3 ـ معطى أن:

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0 \quad , & x = 0, \end{cases}$$

هل g متصلة على $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$ ؟ هل g قابلة للتفاضل على $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$ ؟ **وضّح** إجابتك.

4 ـ عُرِّفت أن $G(x) = \int_0^x g$ ، حيث g هي الدالـة المعطاة في المثـال 3. هل G متصلة على $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$ ؟ هل G قابلة للتفاضل هناك؟ وضح اجابتك.

5 ـ مُعطى أن:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{3} \ , \ \ldots\ldots \\ 0 \ , & \text{(عند النقط الأخرى)} \end{cases}$$

و $H(x) = \int_0^x h$. هل H متصلة على [0,1]؟
هل H قابلة للتفاضل هناك؟ وضّح اجابتك.

6 ـ أثبت أنـه إذا كانت f قـابلة للتكامـل على [a, b] و f فـإن $F(x) = \int_a^x f$ متصلة على [a, b].

7 ـ أثبـت أنــه إذا كــانـت f مـتـصـلة ومــوجــبــة بصرامــة (strictly) عــلى [a, b] و $F(x) = \int_a^x f$ ، فـإن F تكون تـزايدية بصرامة عـلى [a, b] (العبـارة تـزايـديـة بصرامة تعني أن $x_1 < x_2$ تؤدي إلى $F(x_1) < F(x_2)$).

8 ـ أثبت نظرية التكامل بالتجزيء: إذا كانت كل من g ، f دالـة قابلة للتفـاضل بحيث تكون g′ ، f′ دالتين قابلتين للتكامل على [a, b] فإن:

$$\int_a^b f\,g' = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f'g.$$

الفصل الثامن

8

التكاملات المعتلَّة

Improper Integrals

8.1 أنواع التكاملات المعتلة

في الفصل السابق عرّفنا ودرسنا التكامل الريماني لنوع خاص من الدوال وهي الدوال التي تكون نطاقاتها فترات مغلقة. نـذكر أن المفـترض 7.1 يؤكد ضرورة أن تكـون الدالـة محدودة لكي تكـون قابلة للتكـامل، ومـع ذلك تصـادفنا عـدة دوال مهمة وواسعـة الانتشار، حيث تكون منحنيات هذه الدوال ذات خطوط تقارب رأسية، مما يعني أن هذه الدوال غـير محدودة وبـالتالي غـير قابلة للتكـامل. نـطور في هذا الفصـل نـظريـة التكـامـل لبعض الـدوال غـير المحدودة. هناك تقييد آخر للتكامل الريماني يكمن في أن نطاق التكامـل لا بد أن يكـون فترة مغلقـة (محدودة). هـذه الضرورة أكثر دقـة من محـدوديـة (boundedness) الـدالـة المكـاملة (Integrand)، ولكن لحظة من التفكير توضح لنـا أننا لا نستـطيع تكـوين الجمع الـريماني أو حتى تعريف تجزيء على فئة غير محدودة. مع ذلك فإن أغلب الدوال المتداولة معرّفة على كل $\mathbb{R}$ أو على الأقل معرّفة على $(0 ، \infty)$. لهذا السبب فإنه من المرغوب به أن تكون لدينا نـظرية للتكـامل عـلى مثل هـذه الفترات غـير المحدودة، وقـد وُسِّعت النظريـة الريمـانية هنـا لتغطي حالتين جديدتين: في الأولى النطاق غـير المحدود، وفي الثـانية الـدالة المكـاملة غير محـدودة. أيضاً، ندرس تـركيبات وتنـوعات لهـاتين الحـالتين أيضـاً. في كلتا الحـالتين يعـرّف التكامـل الجديد على أنه نهاية التكامل الريماني المُعرَّف سابقاً.

تعريف 8.1:

إذا كان a عدداً حقيقياً وكانت f دالة قابلة للتكامل (الريماني) على [a, t] لكل $t \geqslant a$ ، فإن التكامل المعتل (Improper) لِـ f على $[a ، \infty)$ هو التعبير:

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f.$$

عندما تكون هذه النهاية موجودة، يقال: بأن التكامل المعتل تقاربي ويرمز لقيمة نهايته بالرمز $\int_a^\infty f$ ، وإذا كانت النهاية غير موجودة فإن هذا التكامل المعتل غير متقارب. إذا كان $\lim_{t \to \infty} \int_a^t f = \infty$ أو $\lim_{t \to \infty} \int_a^t f = -\infty$ ، فإن هذا التكامل المعتل يكون تباعدياً.

التكامل المعتل لدالة على $(-\infty ، b]$ يعرّف بالمثل:

$$\int_{-\infty}^b f = \lim_{t \leftarrow -\infty} \int_t^b f.$$

نورد هنا الأمثلة التالية التي تعرّف عليها الطالب في مبادىء التفاضل والتكامل، وذلك لتوضيح بعض الرموز والمصطلحات.

مثال 8.1:

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \lim_{t \to -\infty} \int_1^t \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

لهذا السبب فإن هذا التكامل المعتل تقاربي.

مثال 8.2:

$$\int_0^\infty \cos x \, dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^t \cos x \, dx = \lim_{t \to \infty} (\cos t - 1).$$

هذا التكامل المعتل غير تقاربي؛ لأن $\cos t$ تتذبذب بين 1 و -1 كلما $t \to \infty$.

مثـــال 8.3

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{t\to\infty} (2\sqrt{t} - 1) = \infty.$$

لهذا السبب فإن هذا التكامل المعتل تباعدي.

لتوسيع نطاق التكامل حتى يشمل خط الأعـداد الحقيقية نستعمـل تركيبـاً من التكامـلات المعتلة $\int_a^\infty f$ ، $\int_{-\infty}^b f$.

تعريف 8.2:

إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على $[-t ، t]$ لكل عـدد t، فإن التكـامل المعتـل $\int_{-\infty}^\infty f$ هو التعبير:

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^c f + \lim_{t\to\infty} \int_c^t f$$

عنـدما يكـون c أي عدد حقيقي، هذا النوع من التكـامل يكـون تقـاربيـاً إذا كـان كـل من $\int_{-\infty}^c f$ ، $\int_c^\infty f$ تقاربياً، وفي هذه الحالة فإن:

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f.$$

لاحظ أن تقـارب أو تباعـد التكامـل $\int_{-\infty}^\infty f$ أمر ذو استقـلاليـة عن العـدد c في الصيغـة السابقة (انظر تمرين 8.2.2).

مثـــال 8.4:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \arctan x\Big]_0^t + \lim_{t\to\infty} \arctan x\Big]_0^t$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

لهذا السبب فإن هذا التكامل المعتل تقاربي.

مثــال 8.5:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} (-e^{-x}) \Big]_t^0 + \lim_{t \to \infty} (-e^{-x}) \Big]_0^t$$

$$= \lim_{t \to -\infty} (-1 + e^{-t}) + \lim_{t \to \infty} (-e^{-t} + 1)$$

$$= \infty.$$

لهذا السبب فإن هذا التكامل المعتل تباعدي.

إنّ تعريف التكامل المعتل بدلالة التكامل الريماني المُحدَّد له ميزاته وعيوبه. فمن ميزاته أنه لا حاجة لدراسة نظرية منفصلة للنهاية من أجل هذا النوع الجديد من التكامل، ولكن على الجانب الآخر (أي عيوبه) فهو يتطلب حساب $\int_a^t f$ على أساس أنه دالة في t لنحدد ما إذا كان $\int_a^{\infty} f$ تقاربياً أم لا، والصعوبة في ايجاد الدالة الأصلية الدالة معروف لطلاب التفاضل والتكامل. بما أنه في الكثير من الأحيان يكفي تعيين تقارب f بدون ايجاد قيمته، يكون من المفيد لنا تعريف اختبار يعيّن الشروط الصحيحة والتي بها يؤدي تقارب التكامل البسيط إلى تقارب التكامل البسيط إلى تقارب للتكامل المعقّد. مثل هذه النتيجة تسمى «اختبار المقارنة» Comparison test. هذا هو محتوى النظرية التالية، ولكن يجب أولاً أن نبرهن نتيجة أولية.

نظرية مساعدة 8.1:

إذا كانت f دالة غير سالبة وقابلة للاشتقاق على $[a, t]$ لكل $t \geqslant a$، وإذا وجد عدد B حيث $\int_a^t f \leqslant B$ لكل $t \geqslant a$، فإن $\int_a^{\infty} f$ يكون تقاربياً.

البرهان:

نُعرِّف $F(t) = \int_a^t f$ لكل $t \geqslant a$.

بما أن f غير سالبة وأن $F(t+h) - F(t) = \int_t^{t+h} f$ ، فإنه ينتج من النظرية 7.4 أن F غير تناقصية على $[a ، \infty)$. إذن $F(t) \leqslant B$ يؤكد أن:

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \text{lub}\left\{F(t) : t \geqslant a\right\};$$

وهذا يعني أن $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f$ موجود.

نظرية 8.1:

لنفرض أن g, f دالّتين غير سالبتين، حيث لكل $t \geqslant a$ تكون الدالتان g, f قابلتين للتكامل على $[a, t]$ ولنفرض أن $f(t) \leqslant g(t)$. إذا كان $\int_a^b g$ تقاربيا، فإن $\int_a^\infty f$ تقاربياً أيضاً.

البرهان:

نعرف $h(x) = g(x) - f(x)$ لكل $x \geqslant a$. وبذلك تكون h غير سالبة وقابلة للتكامل على $[a, t]$ لكل $t \geqslant a$ ، و

$$\int_a^t h \leqslant \int_a^t g \leqslant \int_a^\infty g.$$

إذن $\int_a^\infty g$ يكون حداً علوياً للمقدار $\int_a^t h$ لكل $t \geqslant a$. هذا واستناداً إلى النظرية المساعدة 8.1 ينتج أن $\int_a^\infty h$ تكاملاً تقاربياً. الآن:

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f = \lim_{t\to\infty} \int_a^t g - h$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_a^t g - \lim_{t\to\infty} \int_a^t h,$$

والنهايتان الأخيرتان موجودتان (exist)؛ لأن كلاً من $\int_a^\infty g$ ، $\int_a^\infty h$ تقاربي.

إن الفائدة من هذه النتيجة تتضح في الحسابات التالية.

مثــال 8.6:

بيِّن أن $\int_1^{\infty} (x^3 + 1)^{-1}\, dx$ يكون تقاربياً.

من الممكن الحصـول على أصـل $\frac{1}{(x^3 + 1)}$ ، وذلك بتفكيكهـا إلى كسـور جـزئيـة ولكن من الأسهل أن نلاحظ أن:

$$\left[\frac{1}{(x^3 + 1)}\right] < \frac{1}{x^2}$$ لكل $x \geqslant 1$.

ومن مثـال 8.1 نجـد أن $\int_1^{\infty} x^{-2}\, dx$ تقـاربي. إذن بـاستعـمال النـظريــة 8.1 نستنتـج أن $\int_1^{\infty} (x^3 + 1)^{-1}\, dx$ تقاربي أيضاً.

تماريــن 8.2

1 - برهن أنه إذا كان $\int_a^{\infty} f$ تقاربياً و $\alpha > a$ ، فإن $\int_{\alpha}^{\infty} f$ يكون تقاربياً أيضاً.

2 - برهن أن كلاً من تقارب $\int_{-\infty}^{\infty} f$ وقيمته في التعريف 8.2 مستقل عن اختيـار العدد c.

3 - برهن التعميم التالي للنظرية 8.1: لِندعْ أن g, f دالتين غير سالبتين بحيث يكون f قـابلة للتكامـل على $[a, t]$ لكـل $t \geqslant a$ و g قابلة للتكـامل عـلى $[b, t]$ لكل $b \geqslant a$. إذا كـان $\int_a^{\infty} g$ تقـاربيـاً ويـوجـد عـدد c حيث $f(t) \leqslant g(t)$ لكـل $t \geqslant c$ ، فإن $\int_a^{\infty} f$ تقاربي أيضاً.

4 - لأي قيم p يكون $\int_1^{\infty} x^p\, dx$ تقاربياً.

في التمارين من 5 الى 16 حدّد ما إذا كان التكامل المعتل تقاربياً أم لا.

5 - $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x + 1}}\, dx$$

6 - $$\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$$

7 - $$\int_2^\infty \frac{1}{(x \log x)}\,dx$$

8 - $$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

9 - $$\int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx$$

10 - $$\int_{-\infty}^\infty x\,e^{-x}\,dx$$

11 - $$\int_{-\infty}^\infty x\,e^{-x^2}\,dx$$

12 - $$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$$

13 - $$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(1+x^2)}\,dx$$

14 - $$\int_4^\infty \frac{1}{(x^2-x)}\,dx$$

15 - $\int_0^\infty f$ عندما تكون

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 2n-2 \leqslant x \leqslant 2n-1, \\ -1 & \text{if} \quad 2n-1 \leqslant x \leqslant 2n \quad , \end{cases}$$

لكل $n = 1, 2, 3, \dots$

16 ـ $\int_0^\infty g$ عندما تكون

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{if} \quad 2n-2 \leqslant x \leqslant 2n-1, \\ -\dfrac{1}{n} & \text{if} \quad 2n-1 \leqslant x \leqslant 2n \quad , \end{cases}$$

لكل $n = 1, 2, 3, \ldots$

8.3 تكاملات الدوال غير المحدودة Integrals of unbounded Functions

تعريف 8.3:

نأخذ f دالة قابلة للتكامل الريماني على كل فترة جزئية مغلقة من $[a, b)$ ، ولكن f غير قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ ، عندئذ يكون التكامل المعتل للدالة f على $[a, b]$ هو التعبير:

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f.$$

إذا كانت هذه النهاية موجودة، يقال بأن هذا التكامل المعتل تقاربي ويرمز لقيمة نهايته بالرمز $\int_a^{b^-} f$. ما عدا ذلك فإن التكامل المعتل غير تقاربي. إذا كان $\lim_{t \to b^-} \int_a^t f = \infty$ أو $\lim_{t \to b^-} \int_a^t f = -\infty$ ، فإن التكامل المعتل في هذه الحالة يكون تباعدياً. بالطريقة نفسها نعرّف التكامل المعتل:

$$\int_{a^+}^b f = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f.$$

لاحظ أن الرمز $\int_a^{b^-} f$ ، $\int_{a^+}^b f$ التي تستخدم لقيمة التكامل المعتل وتشبه الرمز المستعمل في حالة التكامل الريماني غير المعتل. كثيراً من الكتاب يستعملون $\int_a^b f$ للتكاملات المعتلة وغير المعتلة وتوجد هنا فرصة للاختلاف أو عدم الوضوح؛ لأنه في حالة التكامل المعتل على $[a, b]$ لا بد أن تكون f غير محدودة على $[a, b]$ (انظر التمرين 8.3.1) وهذا عادة ما يكون واضحاً. فعلى سبيل المثال:

$$\int_{1^+}^{\infty} \left[\frac{1}{(x^2-1)} \right] dx$$ تكامل معتل، و:

$$\int_{2}^{3} \left[\frac{1}{(x^2-1)} \right] dx$$ تكامل ريماني عادي.

هذا التعريف يوازي تعريف البند 8.2 وبذلك تترك الأمثلة وتؤخذ كتمارين. وكما من قبل هناك حالات لم يشملها التعريف 3.3 والتي يمكن التعامل معها كتجزيئات للتكاملات التي عُرّفت. فعلى سبيل المثال، إذا كانت f غير محدودة عندما $x \to c$ حيث $a < c < b$ فإننا نكتب:

$$\int_a^b f = \int_a^{c^-} f + \int_{c^+}^b f$$

$$= -\lim_{t \to c} \int_a^t f + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f. \qquad (1)$$

إذا كانت f قابلة للتكامل على فترة جزئية مغلقة من $[a, c)$ ومن $(c, b]$ فإن $\int_a^c f$ ، $\int_c^b f$ كليهما تكامل معتل كما عُرِّفت أعلاه.

كما من قبل، فإن الطرف الأيسر من التكامل المعتلّ في (1) تقاربي عندما وفقط عندما يكون التكاملان المعتلّان في الطرف الأيمن تقاربيين.

تنوع آخر من هذا الشكل من التكامل المعتل هو النوع الذي تكون فيه f غير محدودة عند نقطتي نهاية الفترة $[a, b]$. في هذه الحالة نختار عدد c في (a, b) ونكتب:

$$\int_{a^+}^b f = \int_{a^+}^c f + \int_c^b f$$

$$= \lim_{t \to a} \int_t^c f + \lim_{t \to b} \int_c^t f,$$

حيث يمثل كل تعبير في الطرف الأيمن تكاملاًمعتلاً من النوع السابق (تعريف 8.3) والذي تكون فيه f غير محدودة عند نقطة واحدة من نهايتي الفترة. ومن الممكن برهنة أن اختيار c في الفترة (a, b) لا يؤثر على تقارب وقيمة التكامل المعتل (انظر التمرين 8.3.2).

من الواضح الآن أنّه من الممكن استخدام تركيبات الأنواع السابقة من التكاملات المعتلة لتكوين تكامل معتل لأية دالة يكون منحناها ذا عدد نهائي (منتهي) من خطوط التقارب (asymptotes).

فعلى سبيل المثال، إذا كانت $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ ،

حيث $a \leqslant b$ ، نختار عدد اختياري c في (a, b) ونكتب:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{a-1} f + \int_{a-1}^{a^-} f + \int_{a^+}^{c} f + \int_{c}^{b^-} f + \int_{b^+}^{b+1} f + \int_{b+1}^{\infty} f$$

بالرغم من أن حساب مثل هذا التكامل قد يكون مضجراً ولكن ما حصلنا عليه هو تقسيم التكامل المعتل إلى ستّ من النهايات. والإنجاز الكبير هنا هو أننا لا نحتاج إلى نظرية منفصلة وجديدة لكل حالة. يوجد نوعان رئيسيّان من التكاملات المعتلة فقط وعدد نهائي من التركيبات لهذين النوعين كافية لأغلب الدوال.

ننهي هذا البند باختبار المقارنة (Comparison test) الخاص بالتكامل المعتل للدوال غير المحدودة. هناك تشابه مع النظرية 8.1 وبرهانها. النظرية التالية هي حول هذا الاختبار والمطلوب برهنتها في تمرين 8.3.4، ويمكن إنجاز البرهان بطريقة مشابهة لبرهان النظرية 8.1.

نظرية 8.2:

إذا كانت g, f دالتين غير سالبتين لكل t في (a, b) وكانت g, f قابلتين للتكامل على $[a, t]$ و $f(t) \leqslant g(t)$. إذا كان $\int_{a}^{b^-} g$ تقاربياً، فإن $\int_{a}^{b^-} f$ يكون تقاربياً أيضاً.

هذه النظرية ذات استعمال ثانٍ واضح مع $\int_{a^+}^{b} f$ ، وهو ما يوضح في المثال التالي.

مثـال 8.7:

بيّن أن $\int_{0^+}^{1} [x(x+1)]^{-1}\, dx$ تكامل تقاربي. عندما يكون $0 < x \leqslant 1$ ، فإن:

$$\frac{1}{x(x+1)} \geqslant \frac{1}{x(1+1)} = \frac{1}{2x};$$

وبما أن

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{a\to 0^+} \log x \Big]_a^1 = \infty,$$

فإننا نستطيع أن نستنتج أن الدالة الأكبر من الدالة $\frac{1}{x}$ ذات تكامل تباعدي.

تمارين 8.3

1 ـ برهن أنه إذا كان $\int_a^{b^-} f$ تقاربياً ولكن f غير قابلة للتكامل الريماني على $[a, b]$، فإن f غير محدودة على $[a, b]$.

2 ـ لنفرض أن f قابلة للتكامل على فترة جزئية مغلقة من $[a, b]$ و f غير محدودة عندما $x \to a^+$، $x \to b^-$ وإذا كان $a < c < c' < b$، برهن أن:

$$\int_{a^+}^{c} f + \int_{c}^{b^-} f = \int_{a^+}^{c'} f + \int_{c'}^{b^-} f,$$

وبالتالي فأي اختيار c أو c′ في (a, b) يمكن أن يستخدم في تحديد $\int_{a^+}^{b^-} f$.

3 ـ لنفرض أن f قابلة للتكامل على كل فترة جزئية مغلقة من $(a ، \infty)$ و f غير محدودة كلما $x \to a^+$. برهن أن التعريف:

$$\int_{a^+}^{\infty} f = \int_{a^+}^{c} f + \int_{c}^{\infty} f$$

مستقل عن اختيار c في $(a ، \infty)$. (قارن مع تمرين 8.3.2).

4 ـ برهن النظرية 8.2 مستخدماً نقاشاً أو حجّة مشابهة للنقاش الذي استخدم في برهان النظرية 8.1.

5 ـ لأية قيمة $p < 0$ يكون التكامل المعتل $\int_{0^+}^{1} x^p\, dx$ تقاربياً؟

حدّد في التمارين من 6 إلى 13 ما إذا كان التكامل المعتل تقاربياً أم لا.

6 ـ $\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}\, dx$

7 ـ $\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x\, dx$

8 - $\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{(x^2 - x)} dx$

9 - $\int_{0^+}^{1} \frac{1}{(x - 1)^{2/3}} dx$

10 - $\int_{0^+}^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$

11 - $\int_{0^+}^{\infty} \frac{1}{x \sqrt{x + 1}} dx$

12 - $\int_{0^+}^{1} \log x \, dx$

13 - $\int_{1^+}^{\infty} \frac{1}{x (\log x)^2} dx$

8.4 دالة جاما The Gamma Function

في هذا البند ندرس دالة معرّفة بواسطة تكامل معتل. هذه الدالة تسمى دالة جاما وهي مفيـدة جداً في دراسـة التحليل والتـطبيقات المختلفـة؛ لأن قيمها عنـد الأعـداد الصحيحـة الموجبة تُشكّـل متتاليـة المضروبات (Factorials) $n! = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n$. إذن يمكن محـاولة اعتبار دالة جاما امتداداً لمتتالية المضروبات لتكـوين دالة معـرّفة عـلى الأعـداد غـير الصحيحـة وكذلك المقادير الصحيحـة الموجبة.

تعريف 8.4:

لكل $x > 0$ ، نأخذ:

$$\Gamma (x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

من الضروري إثبات أن هذا التكامل المعتل تقاربي حتى تكون $\Gamma(x)$ معرّفة.

مفترض 8.1:

إذا كان $x > 0$ ، فإن التكامل المعتل $\int_{0^+}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dx$ تقاربي.

البرهان:

نكتب:

$$\int_{0^+}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_{0^+}^{1} e^{-t} t^{x-1} dt + \int_{1}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

أولاً ندرس $\int_{0^+}^{1} e^{-t} t^{x-1} dt$ ونلاحظ أنه إذا كان $x \geqslant 1$ ، فإن $e^{-t} t^{x-1}$ محدودة لكل $0 \leqslant t \leqslant 1$. إذن في هذه الحالة يكون لدينا تكامل ريماني غير معتل وليس هناك أي شيء للإثبات. في حالة $0 \leqslant x < 1$ نلاحظ أن $e^{-t} t^{x-1} < t^{x-1}$ لكل $t > 0$ ويكون $\int_{0^+}^{1} t^{x-1} dt$ تقاربياً (انظر تمرين 8.2.5). إذن باستعمال النظرية 8.2 نستنتج أن $\int_{0^+}^{1} e^{-t} t^{x-1} dt$ تقاربياً أيضاً.

للتعامل مع التكامل على $[1, \infty]$ نتذكر أن $\lim_{t\to\infty} e^{-t} t^{n} = 0$ لكل عدد صحيح موجب n(انظر المثال 6.12). بتطبيق هذه الحقيقة وذلك بوضع $n \geqslant x + 1$ نرى أنه عندما يكون t كبيراً جداً فإن:

$$e^{-t} t^{x+1} \leqslant e^{-t} t^{n} < 1;$$

ومن ذلك

$$e^{-t} t^{x-1} < t^{-2}$$

لكل t أكبر من عدد ما c . إذن باستخدام النظرية 8.2 والتمارين 6.1.3 والتمارين 8.1.4 فإن تقارب $\int_{1}^{\infty} t^{-2} dt$ يؤدي إلى تقارب التكامل

$$\int_{1}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

الآن وبعد ضمان أن $\Gamma(x)$ معرّفة، فالمسألة التالية هي برهنة معادلة دالية لـ Γ تثبّت العلاقة بين Γ والمضروبات. المعادلة الدالية هي معادلة تحوي قيم دالة عند نقطتين أو أكثر في نطاقها. فعلى سبيل المثال، الدالة f والمعطاة:

$$f(x) = 2x + 1$$

تحقِّق المعادلة الدالية

$$f(x + 3) = f(x) + 6$$

لكل عدد حقيقي x.

نظرية 8.3:

لكل $x > 0$ ، فإن $\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$.

البرهان:

لنفرض أن $0 < \varepsilon < 1 < b$ نستخدم التكامل بالتجزيء (تمرين 7.6.8) لنحصل على:

$$\int_{\varepsilon}^{1} e^{-t} t^{x-1}\, dt = \frac{e^{-1}}{x} - \frac{e^{-\varepsilon}\varepsilon^{x}}{x} + \left(\frac{1}{x}\right) \int_{\varepsilon}^{1} e^{-t} t^{x}\, dt \qquad (1)$$

و

$$\int_{1}^{b} e^{-t} t^{x-1}\, dt = e^{-b}\left(\frac{b^{x}}{b}\right) - \frac{e^{-1}}{x} + \frac{1}{x}\int_{1}^{b} e^{-t} t^{x}\, dx \qquad (2)$$

لنترك $\varepsilon \to 0^{+}$ في (1) نحصل على

$$\int_{0^{+}}^{1} e^{-t} t^{x-1}\, dt = \left(\frac{1}{ex}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)\int_{0^{+}}^{1} e^{-t} t^{x}\, dt; \qquad (3)$$

ونترك $b \to \infty$ في (2) نحصل على:

$$\int_{1}^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = \left(-\frac{1}{ex}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)\int_{1}^{\infty} e^{-t} t^{x}\, dt. \qquad (4)$$

الآن نجمع المعادلتين (3)، (4) للحصول على:

$$\int_{0^{+}}^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = \int_{0^{+}}^{1} e^{-t} t^{x-1}\, dt + \int_{1}^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad (5)$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)\left[\int_{0^{+}}^{\infty} e^{-t} t^{x}\, dt + \int_{1}^{\infty} e^{-t} t^{x}\, dt\right] = \left(\frac{1}{x}\right)\int_{0^{+}}^{\infty} e^{-t} t^{x}\, dt$$

بتطبيق التعريف 8.4 للتكامل الأول والأخير في (5) نستنتج:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1)$$

ومن الواضح أن هذه المعادلة تكافىء المعادلة الدالية المطلوبة.

الخلاصة التالية هي نتيجة من النظرية 8.3 فقط ولكنها أحسن خاصية معروفة للدالـة Γ، لذا سنطلق عليها عنوان «نظرية».

نظرية 8.4:

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{6}$$

البرهان:

نبرهن هذه النظرية مستخدمين فكرة الاستقراء الرياضي (انظر الملحق أ).

أولاً نتحقق من أن (6) صحيحة في حالة $n = 1$ وذلك بحساب:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$$

(انظر التمرين 8.2.8).

وبما أن !0 عُرِّف لكي يكون ذات قيمة 1، فيكون لدينا:

$$\Gamma(1) = 0!.$$

نفترض أن (6) تصح لأية قيمة اختيارية للعدد n، ولنقل $n = k$:

$$\Gamma(k) = (k-1)!. \tag{7}$$

علينا الآن إثبات أنّ ذلك يستتبع أن (6) صحيحة للحالـة $n = k + 1$. من النظريـة 8.3 لدينا:

$$\Gamma(k+1) = k\,\Gamma(k),$$

و (7) يسمح لنا أن نضع بدلاً من $\Gamma(k)$ العدد $(k-1)!$.

لهذا السبب فإن:

$$\Gamma(k+1) = k\,(k-1)! = k!,$$

ومن ذلك نستنتج أن (6) صحيحة في حالة $n = k + 1$ كلما كانت صحيحة في حالة $n = k$. إذن سمح لنا مبدأ الاستقراء الرياضي أن نستنتج أن (6) صحيحة لكل عدد صحيح موجب n.

منْ الممكن بمساعدة النظرية 8.4 تمديد نطاق الدالة Γ ليشمل الأعداد السالبة التي لا تكون صحيحة. إن جوهر الفكرة هو تعريف Γ بحيث تظل (6) صحيحة خلال النطاق الموسّع. على سبيل المثال نعرّف

(8) $$\Gamma(x) = \left(\frac{1}{x}\right)\Gamma(x+1) \quad \text{إذا كان} \quad -1 < x < 0،$$

بما أن $x + 1$ في $(0, 1)$ عندما يكون x في $(-1 ، 0)$، وقد عُرِّف الطرف الأيمن من (8) مسبقاً بواسطة التعريف 8.4. ومن الواضح أن(8) يكافيء (6). الآن وبعد تعريف Γ على $(-1 ، 0)$ نستطيع تعريف:

$$\Gamma(x) = \left(\frac{1}{x}\right)\Gamma(x+1) \quad \text{إذا كان} \quad -2 < x < -1 .$$

هذا الاستنتاج المستمر يتضمّن أن لكل عدد صحيح موجب n يكون

(9) $$\Gamma(x) = \left(\frac{1}{x}\right)\Gamma(x+1) \quad \text{إذا كان} \quad -n < x < -n+1 .$$

إذن يتكون نطاق Γ الآن من كل الأعداد الحقيقية ما عدا ... ، -2 ، -1 ، 0 . لن نقوم بأية محاولة لتعريف $\Gamma(x)$ عندما يكون x عدداً صحيحاً غير موجب؛ لأنه من غير المحتمل استعمال $x = 0$ في (8) وأيضاً Γ غير محدودة كلما $x \to 0^+$. هذه الخاصية محتواة في النتيجة التالية (قارن ذلك بتمرين 8.4.6).

مفترض 8.2:

$$\lim_{x \to -0^+} \Gamma(x) = \infty.$$

البرهان :

إذا كان $x > 0$ فإن :

$$\Gamma(x) > \int_{0^+}^{1} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\geqslant \int_{0^+}^{1} e^{-1} t^{x-1} dt$$

$$= e^{-1} \lim_{a \to 0^+} \int_{a}^{1} t^{x-1} dt$$

$$= e^{-1} \lim_{a \to 0^-} \left(\frac{1}{x} \right) (1 - a^x)$$

$$= \frac{1}{ex}.$$

إذن :

$$\lim_{x \to 0^+} \Gamma(x) \geqslant \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{ex} \right) = \infty.$$

ويمكن إيجاد النهاية من الجهة اليسرى للدالة $\Gamma(x)$ عند $x = 0$ بسهولة وذلك باستعمال (8) أو (9)

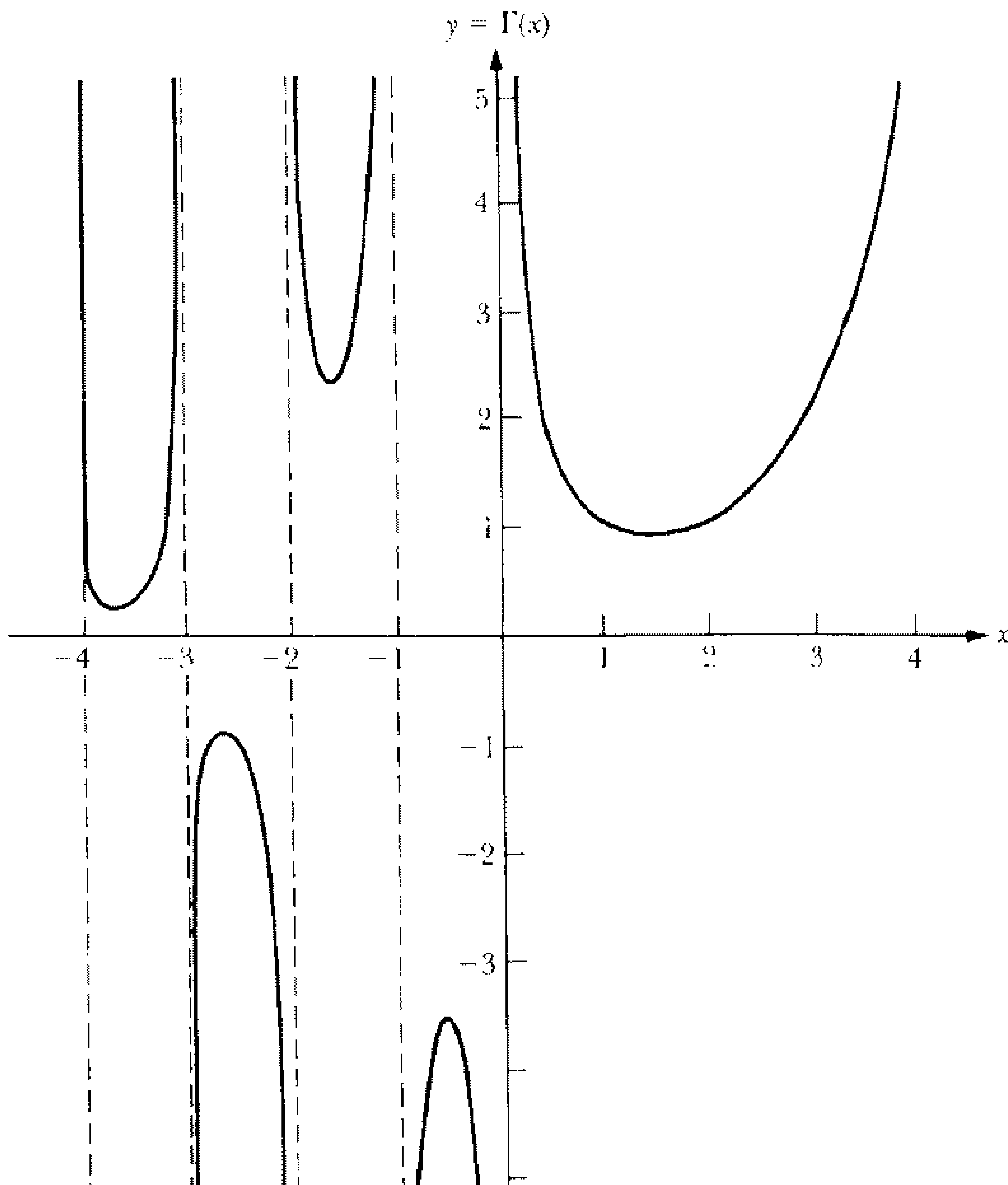
$$\lim_{x \to 0} \Gamma(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \right) \Gamma(x + 1) = -\infty.$$

من هذه النهايات نستطيع استنتاج أن منحني $y = \Gamma(x)$ له خطوط اقتراب رأسية عند $x = 0$ ، -1 ، -2 ، ... . إن تفاصيل هذا الاستنتاج مطلوبة في التمرين 8.4.8. وبسبب التطبيقات العديدة للدالة Γ، فإن قيم دالة جاما قد وضعت في جداول. في المفترض التالي نحسب إحدى القيم غير التكاملية للدالة $\Gamma(x)$.

إن منحني الدالة $y = \Gamma(x)$ موضح في الشكل 8.1.

مفترض 8.3:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{\pi}.$$



شكل (8.1)

البرهان:

باستخدام التعريف 8.4 يكون لدينا:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{0^{+}}^{\infty} e^{-t}\, t^{-1/2}\, dt.$$

بتعويض $x = \sqrt{t}$ نرى أن ذلك يكافىء:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

ولذلك تكمن المسألة الآن في حساب التكامل غير البسيط (غير بسيط يعني أن e^{-x^2} ليس لها دالـة أصلية وقـد قُدمت من قبـل). إنّ تقنية هـذا الحساب تتلخّص في استخـدام التكـامـل

الثنائي المكرر (iterated double integral)، بالرغم من أن ذلك واضح في مبادىء التفاضل والتكامل، فإننا لن نتعرض لنظرية التكامل الثنائي حتى الفصل السادس عشر. ومع علمنا بأن ذلك لا يتماشى مع الترتيب المنطقي سوف نستخدم التكامل الثنائي لحساب هذا التكامل.

لدينا:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-x^2} dx,$$

ولهذا نفترض أن:

$$I = \int_0^{b} e^{-x^2} dx.$$

ومن ذلك نجد أن:

$$I^2 = \left(\int_0^{b} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^{b} e^{-y^2} dy\right) = \int_0^{b} \int_0^{b} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

التكامل الأخير هو تكامل ثنائي على المربع:

$$\left\{(x, y): 0 \geqslant x \geqslant b \text{ ،} \ 0 \geqslant y \geqslant b\right\}.$$

قارن هذا التكامل مع التكاملين على النطاقين اللذين على شكل ربع دائرة R_1 ، R_2 في الربع الأول واللذين يكونا محدودين بالمنحنيات $x^2 + y^2 = b^2$ ، $x^2 + y^2 = 2b^2$ على التوالي (انظر الشكل 8.2). بما أن التكامل موجب فيكون لدينا:

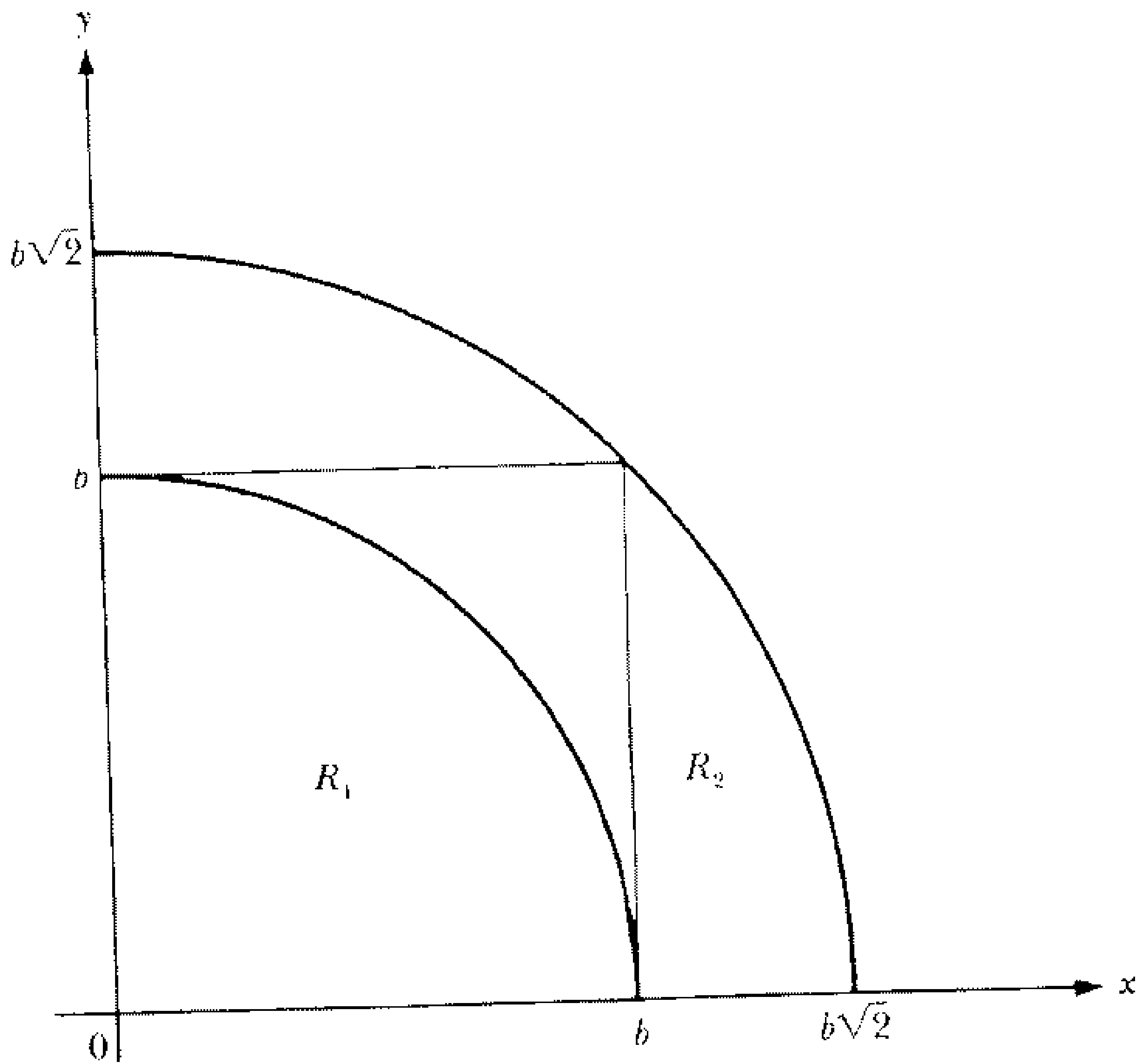
$$\int_{R_1}\int e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leqslant \int_0^{b} \int_0^{b} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leqslant \int_{R_2}\int e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

بتحويل التكامل الثنائي إلى الإحداثيات القطبية يكون لدينا:

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{b} e^{-r^2} rdrd\theta \leqslant I^2 \leqslant \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{b\sqrt{2}} e^{-r^2} rdrd\theta,$$

وبهذا يكون

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)(1 - e^{-b^2}) \leqslant I^2 \leqslant \left(\frac{\pi}{4}\right)(1 - e^{-2b^2}).$$



شكل (8.2)

إذن من الواضح أن

$$\lim_{b \to \infty} I^2 = \frac{\pi}{4},$$

وهكذا:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

$$= 2\lim_{b \to 0} I$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\pi}\,.$$

تمارين 8.4

1 ـ أوجد قيم :

a - $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$، b - $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$، c - $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$، d - $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$.

2 ـ أحسب $\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{t^3}\,dt$.

3 ـ أحسب $\int_0^\infty e^{-3t}\,t^{1/2}\,dt$.

4 ـ أحسب $\int_{0^+}^\infty \left(\log\frac{1}{u}\right)^{1/2} du$.

5 ـ أحسب $\int_{0^+}^1 \left(\log\frac{1}{u}\right)^{-1/2} du$.

6 ـ استخدم النظرية 8.3 لبرهنة أن :

$$\lim_{x\to a^+} x\,\Gamma(x) = 1$$ واستنتج أن $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \infty$.

7 ـ برهن أن $\lim_{x\to 0} \Gamma(x) = -\infty$.

8 ـ برهن أن منحني $y = \Gamma(x)$ له خطوط تقارب رأسية عند $x = 0 ، -1 ، -2 ، \ldots$.

9 ـ برهن أنه إذا كان $\alpha > 0$ و $x > 0$ ، فإن :

$$\int_{0^+}^\infty e^{-\alpha t}\,t^{x-1}\,dt = \alpha^{-x}\,\Gamma(x)$$

10 ـ برهن أنه إذا كان $\alpha > 0$ ، فإن :

$$\int_{0^+}^\infty e^{-t^\alpha}\,dt = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

11 ـ استخدم فكرة الاستقراء الرياضي لبرهنة أن :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left((2n)!\right)\frac{\sqrt{\pi}}{(4^n\,n!)}$$ لكل $n = 0,1,2,\ldots$.

8.5 تحويل لابلاس The Laplace transform

نرى في هذا البند إمكانية استخدام التكامل المعتلّ في تحويل الدالة المعطاة إلى دالة أخرى. إنّ الباعث لمثل هذا التحويل هو الأمل في أنْ تكون الدالة الجديدة أسهل من الدالة المعطاة وبالتالي السماح لحل المسألة في النظام الجديد وبعد ذلك تحويل الحل مرة أخرى إلى النظام الأصلي. من المحتمل أن أحسن تطبيق معروف لتحويل لابلاس هو في حلّ المعادلات التفاضلية للمسائل ذات القيم الابتدائية.

تعريف 8.5:

إذا كان نطاق الدالة f يشمل $[0 ، \infty)$ فإن تحويل لابلاس للدالة f هو الدالة $\mathscr{L}(f)$ المعرَّفة كالآتي:

$$\mathscr{L}\{(f)\} = \int_{0^+}^{\infty} e^{-xt} f(t)\, dt.$$

يتكون نطاق الدالة $\mathscr{L}\{f\}$ من كل الأعداد x التي يكون التكامل المعتل لها تقاربياً. لاحظ أنه إذا كانت $f(t)$ محدودة عندما $t \to 0^+$، فإن التكامل في التعريف 8.5 يكون من نوع $\int_0^\infty$ g، وإذا كانت $f(t)$ غير محدودة كلما $t \to 0^+$، فإننا نكتب:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_{0^+}^{b} e^{-xt} f(t)\, dt + \int_{b}^{\infty} e^{-xt} f(t)\, dt.$$

مثال 8.8:

إذا كانت $f(t) = e^{-t}$ فإن تحويلها اللابلاسي هو:

$$\mathscr{L}\{e^{-x}\} = (x+1)^{-1} \quad \text{لكل} \quad x > -1 .$$

يمكن التحقق من ذلك بحساب التكامل المعتل.

$$\mathscr{L}\{e^{-x}\} = \int_0^\infty e^{-xt} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{-t(x+1)\, dt}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-e^{-t(x+1)}}{(x+1)}\right]_{t=0}^{b} = \frac{1}{x+1} .$$

لاحظ أن التكامل تقاربي عندما وفقط عندما يكون

$\lim_{b\to\infty} e^{-b(x+1)} = 0$ ، والذي يوضح أن نطاق $\mathscr{L}\{e^{-x}\}$ هو $(-1 ، \infty)$.

مثــال 8.9:

إذا كانت $f(t) = t$ فإن تحويلها اللابلاسي هو:

$$\mathscr{L}\{x\} = x^{-2} \quad \text{لكل} \quad x > 0 \ .$$

وذلك، لأن:

$$\mathscr{L}\{x\} = \int_{0}^{\infty} e^{-xt}\, t dt = \lim_{b\to\infty} \left[\left(\frac{-te^{-xt}}{x} \right) - \left(\frac{e^{-xt}}{x^2} \right) \right]_{t=0}^{b} = x^{-2}$$

وهذه النهاية موجودة إذا وفقط إذا كان $x > 0$.

في التمارين 8.5، مطلوب حساب $\mathscr{L}\{f(x)\}$ لعدة دوال ابتدائية أو بسيطة. تزود هـذه التمارين القارىء بخبرة إضافية في حساب التكاملات المعتلة ولهذا السبب فإننا نترك حل هذه التمارين للقارىء ولكن قيمة هذه القائمة من الأمثلة تظهر في حـل التمارين وتـزداد فعاليـة في امكانية تركيب بعضها مع بعض لاستنتاج تحويل عدة دوال أخرى. هذه هي النقطة الرئيسية في النظريتين التاليتين.

نظرية 8.5:

إذا كان a و b عددين حقيقيين فإن:

$$\mathscr{L}\left\{af(x) + bg(x)\right\} = a\,\mathscr{L}\left\{f(x)\right\} + b\,\mathscr{L}\left\{g(x)\right\}$$

عندما يكون نطاق الدالة في الطرف الأيسر يحتوي على كل من نطاق $\mathscr{L}\{f\}$ و $\mathscr{L}\{g\}$.

البرهان:

هذه نتيجة مباشرة من التعريف 8.5 والنظرية 7.2.

إن التحويل الـذي له الخـاصية المعـبر عنها في النـظرية 8.5 يسمى تحـويلاً خـطياً Linear Transformation. الاسم أخذ من الحقيقة القائلة: بأن هذه الخاصية استخرجت من الدالة $f(x) = mx$ ذات المنحني على شكل خط مستقيم يمر بنقطة الأصل، وذلك، لأن:

$$f(ax + by) = m\,(ax + by)$$

$$= a(mx) + b(my) = af(x) + bf(y).$$

النتيجة التالية تتعلق بتحويل من نوع آخـر من تركيبـات الدوال. تسمى خـاصية النقـل Shifting property التي تُذكّر بتحويل أو نقل المحاور في الهندسة التحليلية.

نظرية 8.6:

إذا كان a عدداً حقيقياً و $\mathscr{L}\{f(x)\}$ معرفة لكل $x > b$، فإن

$$\mathscr{L}\{e^{ax} f(x)\} = \mathscr{L}\{f(x-a)\} \quad \text{لكل} \quad x > a + b \,.$$

البرهان:

استناداً للتعريـف 8.5 لدينا:

$$\mathscr{L}\{e^{ax} f(x)\} = \int_{0^+}^{\infty} e^{-xt} e^{at} f(t)\, dt$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} e^{-(x-a)t} f(t)\, dt$$

$$= \mathscr{L}\{f(x-a)\}.$$

يمكن اثبات المساواة الأخـيرة بملاحـظة أن آخر تكـامل هـو بالضبط التكـامل المعـرف للدالة $\mathscr{L}\{f(x)\}$ وذلك بوضع بدلاً من x الكمية $x - a$.

ملاحظة:

الملاحظ أن «x غير بـ $x - a$» تعبر عن طريقة تطبيق هذه النظرية للحصول عـلى تحويـل لابلاسي آخر.

مثــال 8.10:

إذا كانت $f(t) = te^{at}$ ، فإن تحويلها اللابلاسي هو:

$$\mathscr{L}\{xe^{ax}\} = (x - a)^{-2}.$$

ببساطة نطبّق النظرية 8.6 للدالة المحايدة في المثال 8.9.

في النـظرية التـالية نـوضح أن تحـويل لابـلاس للدالة وتحـويل لابـلاس لتفاضـل الدالـة مرتبطان بعلاقة بسيطة. هذه الخاصية جعلت تحـويل لابلاس مفيداً جـداً في حلّ المعـادلات التفاضلية.

نظرية 8.7:

لنفرض أن الدالة f لها مشتقة أولى متصلة على $[0, \infty)$. إذا كان:

$\lim_{t \to \infty} e^{-xt} f(t) = 0$ و $\mathscr{L}\{f(x)\}$ موجوداً عندما $x > a$ ، فإن:

$$\mathscr{L}\{f'(x)\} = x\,\mathscr{L}\{f(x)\} - f(0) \quad \text{لكل} \quad x > a \qquad (1)$$

البرهان:

التكامل بالتجزيء يعطينا:

$$\int_0^b e^{-xt} f'(t)dt = e^{-xb} f(b) - f(0) + \int_0^b xe^{-xt} f(t)\, dt \qquad (2)$$

بما أن $\lim_{b \to \infty} e^{-xb} f(b) = 0$ عندما $b \to \infty$ ، فإن المعادلة (2) تصبح:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'(x)\} &= \int_{0^+}^{\infty} e^{-xt} f'(x)\, dt \\
&= -f(0) + \int_{0^+}^{\infty} xe^{-xt} f(t)\, dt \\
&= -f(0) + x\,\mathscr{L}\{f(x)\}.
\end{aligned}$$

استناداً إلى (1) ينتج تحويل لابلاس للدالة f' ببساطة من ضرب تحويل f بالمتغير المستقل وطرح القيمة الابتدائية للدالة f.

مثال 8.11:

لنفرض أن $f(t) = te^{at}$ ، فإن

$f'(t) = e^{at} + ate^{at}$ وتحويل لابلاس للدالة f' يكون:

$$\mathscr{L}\left\{e^{ax} + axe^{ax}\right\} = x\,\mathscr{L}\left\{xe^{ax}\right\} - f(0)$$

$$= \frac{x}{(x-a)^2}$$

وذلك من (1) ومثال 8.10.

8.5 تمارين

1 - برهن أنه إذا كانت f دالة غير سالبة بحيث يكون التكامل في $\mathscr{L}\{f(x_0)\}$ تقاربياً، فإن $\mathscr{L}\{f(x)\}$ يوجد لكل $x > x_0$.

2 - برهن أنه لأي دالة غير سالبة f، فإن نطاق $\mathscr{L}\{f(x)\}$ يكون إحدى الفئات التالية: $\varnothing$، $(a ، \infty)$، $[a ، \infty)$ أو $(-\infty, \infty)$.

3 - لنفرض أن للدالة f مشتقة ثانية متصلة على $[0 ، \infty)$ و $\lim_{t\to\infty} e^{-xt} f(t) = 0$ وكذلك $\lim_{t\to\infty} e^{-xt} f'(t) = 0$ و $\mathscr{L}\{f(x)\}$ ، $\mathscr{L}\{f'(x)\}$ موجودان عندما تكون $x > a$ ، فبرهن أن:

$$\mathscr{L}\left\{f''(x)\right\} = x^2\,\mathscr{L}\left\{f(x)\right\} - xf(0) - f'(0).$$

تحقق من الصيغ التالية مع العلم بأن b, a تمثل ثوابت في كل حالة و n عدد صحيح موجب.

4 - $\mathscr{L}\{a\} = \frac{a}{x}$ ، $x > 0$.

5 - $\mathscr{L}\{x^n\} = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ ، $x > 0$.

6 - $\mathscr{L}\{\sin ax\} = \dfrac{a}{(x^2 + a^2)}$ ، $x > 0$.

7 - $\mathscr{L}\{\cos ax\} = \dfrac{x}{(x^2 + a^2)}$ ، $x > 0$.

8 - $\mathscr{L}\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{(x - a)}$ ، $x > 0$.

9 - $\mathscr{L}\{x^n e^{ax}\} = \dfrac{n!}{(x - a)^{n+1}}$ ، $x > 0$.

10 - $\left\{e^{ax} \sin bx\right\} = \dfrac{b}{\left[(x - a)^2 + b^2\right]}$ ، $x > a$.

11 - $\mathscr{L}\left\{e^{ax} \cos bx\right\} > \dfrac{(x - a)}{\left[(x - a)^2 + b^2\right]}$ ، $x > a$.

12 - $\mathscr{L}\left\{zinh\ ax\right\} = \dfrac{a}{(x^2 - a^2)}$ ، $x > a$

(تذكر أن $\sinh z = \dfrac{(e^z - e^{-z})}{2}$) ,

13 - $\mathscr{L}\left\{\cosh ax\right\} = \dfrac{x}{(x^2 - a^2)}$ ، $x > a$

(تذكر أن $\cosh z = \dfrac{(e^z + e^{-z})}{2}$) .

14 - $\mathscr{L}\left\{ax^2 + bx + c\right\} = \left(\dfrac{2a}{x^3}\right) + \left(\dfrac{b}{x^2}\right) + \dfrac{c}{x}$ ، $x > 0$.

15 ـ $\mathscr{L}\left\{\sin^2(ax)\right\} = \dfrac{(2a^2)}{x(x^2+4a^2)}$ ، $x > 0$.

(إرشاد: لنفرض أن $f(x) = \sin^2 ax$ وبذلك تكون

$f'(x) = 2a \sin ax \cos ax$ ومنها نستخدم النظرية 8.7) .

16 ـ(*) $\mathscr{L}\left\{\cos^2(ax)\right\} = \dfrac{(x^2+2a^2)}{x(x^2+4a^2)}$ ، $x > 0$.

(*) للحصول على معلومات اضافية في موضوع التحويل اللابلاسي وحل مسائل القيم الابتدائية بواسطته، انظر كتاب «المعادلات التفاضلية» تأليف جون أ. تيرني وترجمة د. أحمد صادق القرماني ود. الفيتوري عمر سالم من منشورات جامعة الفاتح ـ طرابلس عام 1989. (ملاحظة المترجم)

الفصل التاسع

9

المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

9.1 المتسلسلات التقاربية والتباعدية

نفرض أن $\{a_k\}$ هي متتالية أعداد، ونعرّف المتتالية $\{s_n\}$ المرتبطة بها بالعلاقة:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

عندئذ تسمى $\{s_n\}$ بمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة اللانهائية $\Sigma\, a_k$. ويسمى العدد s_n بالمجموع الجزئي النوني (Partial sum)، ويسمى a_k بالحد رقم k (الكائي للمتسلسلة). قد يلاحظ القارىء الفطين أن هذه المقولة لا تُعرِّف حد المتسلسلة اللانهائية. بالفعل، لا يوجد فرق أساسي بين $\{s_n\}$ و $\Sigma\, a_k$. فكلاهما يمثل دالة (نفس الدالة) من N إلى ـ داخل R. الفرق الوحيد بين دراسة المتتاليات ودراسة المتسلسلات يكمن فقط في وجهة النظر. وتاريخياً فقد بحثت المتسلسلات اللانهائية أولاً، ربما لأنه كان من الطبيعي طرح التساؤل عما إذا كان المجموع يمكن تمديده ليعطي قيمه لمجموع فئة لانهائية من الحدود. على سبيل المثال:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots = ?$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = ?$$

أو

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots = ?$$

وبمجرد أن ندرك أن المتسلسلة متطابقة مع المتتالية، يمكن سحب نظرية المتتاليات التي طورت في الباب الثاني على المتسلسلات.

على سبيل المثال فالتعريف التالي لا يتطلب تقديم مفهوم التقارب، بل انه مجرد تقديم مصطلح ورموز تستخدم في المتسلسلات اللانهائية.

تعريف 9.1:

تكون المتسلسلة $\sum a_k$ تقاربية إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية متقاربة. وفي هذه الحالة نكتب:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_n \{\sum_{k=1}^{n} a_k\},$$

وقيمة النهاية هذه تسمى بمجموع المتسلسلة، وفي حالة:

$\lim_n \{\sum_{k=1}^{\infty} a_k\} = \infty$ ، تسمى المتسلسلة $\sum a_k$ تباعدية، ونكتب: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

لقد قمنا فقط بتقديم بعض المصطلحات والرموز الخاصة التي ربما تكون جديدة على معظم القراء. وفي الواقع فإنها لا تستخدم بشكل شامل، ولكنها مناسبة. أولاً لاحظ أن الرمز $\sum a_k$ يرمز إلى دالة (من $\mathbb{N}$ إلى داخل $\mathbb{R}$) في حين أن $\sum_{k=1} a_k$ يرمز إلى عدد. وهذا التفريق أو الفصل أجريناه بالطريقة نفسها التي استخدمنا فيها f للرمز إلى دالة في حين أن f(x) ترمز إلى عدد في مدى هذه الدالة. وتكمن الخصوصية الأخرى في المعنى الخاص لكلمة «تباعدية». وفي الاستعمال العادي نفسه تستخدم الكلمة «تباعدية» لوصف أية متسلسلة ليست تقاربية: وهنا نسمي مثل هذه المتسلسلة باللاتقاربية (غير التقاربية) وعندما نقول: إن $\sum a_k$ تباعدية نعني أنها غير تقاربية بمعنى خاص أو بطريقة خاصة هي بالذات أن مجاميعها الجزئية تؤول إلى المالانهاية ∞.

مثال 9.1 المتسلسلة الهندسية:

المتسلسلة $\sum r^{k-1}$ تقاربية عندما وفقط عندما يكون $|r| < 1$. إذا كان $r \neq 1$ فإن المجاميع الجزئية تعطى بالعلاقة البسيطة:

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r},$$

وقـد رأينا المتتـالية $\{r^n\}$ في البـاب الثاني. إذا كـان $|r| < 1$ فإن $\lim_n r^n = 0$ ، ولـذا فلدينا:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = \frac{1}{1-r} \quad ، \left(|r| < 1 \right).$$

وإذا كـان $r < -1$ فإن $\{r^n\}$ غـير محدودة، ولـذا فـإن $\sum r^k$ تبـاعـديـة. وإذا كـان $r > 1$ فـإن $\lim_n r^n = \infty$ ، ولذا فـإن $\sum r^k$ تباعـدية. وإذا كـان $r = -1$ فإن متتـالية المجاميع الجزئية هي $\left\{(-1)^{n+1}\right\}$ ومن ثم فإن $\sum r^k$ تباعديـة. وأخيراً إذا كـان $r = 1$ فإن المجموع الجزئي النوني يعطى بالعلاقة $s_n = n$ ، ولذا فإن r^k تباعدية.

مثـــال 9.2:

إذا كان:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{j} & , \quad k = 2j-1, \\ -\frac{1}{j} & , \quad k = 2j \quad , \end{cases}$$

فإن $\sum a_k$ تقاربية و $\sum_{k=1}^{\infty} a_i = 0$. في هذه الحـالة يكـون من الأسهل أن نكتب المتسلسلة في صورة مفكوك:

$$\sum{}' a_k = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots$$

والآن من الواضح أن المجاميع الجزئية تتقارب إلى الصفر؛ لأن

$$\sum_{k=1}^{2j} a_k = 0 \quad و \quad \sum_{k=1}^{2j-1} a_k = \frac{1}{j}$$

مثـــال 9.3 المتسلسلة التوافقية:

المتسلسلة $\sum \left(\frac{1}{k}\right)$ تباعدية، ولإثبات ذلك نأخذ المجموع الجـزئي رقم $(2n)$ ونجمع الحدود كما يلي:

$$\sum_{1}^{2^n}\left(\frac{1}{k}\right)=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{1+2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{1}{8}\right)+\ldots+2^{n-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}.$$

وإذا كان $m > 2^n$ فإن :

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}>1+\frac{n}{2},$$

وبذلك ينتج أن $\sum \frac{1}{k}$ تباعدية .

والخلاصة الأولى التي سنثبتها للمتسلسلات هي نتيجة بسيطة للتقارب .

مفترض 9.1 :

إذا كانت $\sum a_k$ تقاربية ، فإن $\lim_k a_k = 0$.

البرهان :

إذا كانت $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ فإن :

$$\lim_n a_n = \lim_n (s_n - s_{n-1})$$

$$= \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1}$$

$$= A - A$$

$$= 0.$$

لاحظ أنه وفقاً لهذا المفترض فـإن الشرط $\lim_k a_k = 0$ هو شرط ضروري فقـط لتقارب

$\sum a_k$. لكن هذا الشرط ليس كافياً للتأكد من التقارب، لأن المتسلسلة التوافقية في مثال 9.3 تبين أن النتيجة العكسية خطأ(*).

نفرض أن $\sum a_k$ متسلسلة لانهائية ثم نغيّر عدداً محدوداً من الحدود لتكوين المتسلسلة $\sum b_k$. وإذا كان N هو أكبر عدد صحيح بحيث يكون عنده $b_k \neq a_k$ ، $\sum_{k=1}^{N} b_n = C + \sum_{k=1}^{N} = a_k$ عندئذ فإن $n > N$ تتضمّن أن:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = C + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

وبذلك فإن $\sum b_k$ تقاربية عندما وفقط عندما تكون $\sum a_k$ تقاربية، ونكون قد أثبتنا النتيجة التالية:

نظرية مساعدة 9.1:

إذا وُجد للمتسلسلتين $\sum b_k$ و $\sum a_k$ ذلك العدد N بحيث إنه لقيم $k > N$ يكون $a_k = b_k$ عندئذ يكون كلاهما إمّا تقاربيتين أو كلاهما تباعديتين.

وبالطريقة نفسها التي أثبتت بها النظرية المساعدة 9.1 يمكن أن نبين بسهولة أنه إذا حذف عدد محدود من الحدود (أو استبدلت بالصفر) لا يتغير تقارب أو تباعد المتسلسلة.

تمارين 9.1

1 أثبت أن حذف أية فئة محدودة (نهائية) من الحدود من متسلسلة لانهائية $\sum a_k$ لا يغير من تقاربها أو تباعدها (لاحظ أن: حذف الحدود مشابه لاستبدالها بالصفر ولكنه ليس الشيء نفسه).

2 ـ أثبت أن التقارب أو غير التقارب للمتسلسلة $\sum a_k$ لا يتغير بإضافة عدد كبير ولكن محدود من الحدود الجديدة إلى المتسلسلة.

(*) عكس المفترض غير صحيح ولكن نفيه (أو نقيضه) صحيح دائماً (طالما كان المفترض نفسه صحيحاً). وينتج نفي المفترض (أو النظرية) من نفي كل من الشرط والنتيجة وجعل نفي الشرط نتيجة ونفي النتيجة شرطاً، وللمفترض الوارد نحصل على نفيه كالتالي. «إذا كان $\lim_k a_k \neq 0$ فإن $\sum a_k$ متباعدة» وهو شرط كافي للتباعد ولكنه غير ضروري. فالمتسلسلة التوافقية متباعدة مع أن $\lim_k a_k = 0$. (ملاحظة المترجم)

3 ـ أعط مثالاً على متسلسلة لاتقاربية $\sum a_k$ بحيث يكون $\lim_k a_k = 0$ ، وتأخذ S_n عدداً لانهائياً من القيم الموجبة وعدداً لانهائياً من القيم السالبة.

4 ـ أعط مثالاً على متسلسلة تباعدية $\sum a_k$ ذات عدد لانهائي من الحدود السالبة وعدد لانهائي من الحدود الموجبة.

5 ـ أعط مثالاً لمتسلسلة تباعدية $\sum a_k$ بحيث يكون $\lim_n \left(\frac{s_n}{n} \right) = 0$ ، أي أن s_n تؤول إلى مالانهاية أبطأ مما تؤول n إلى ∞.

6 ـ عين ما إذا كانت المتسلسلة $\sum \frac{1}{k(k+1)}$

متقاربة أم متباعدة.

[إرشاد: $\frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$]

7 ـ عين ما إذا كانت المتسلسلة $\sum a_k$ تقاربية أم تباعدية حيث:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{m} & , \quad k = m^2 \quad , \quad m = 1, 2, \ldots, \\ 0 & , \quad \text{لقيم } k \text{ الأخرى} . \end{cases}$$

8 ـ عين ما إذا كانت المتسلسلة التالية $\sum a_k$ تقاربية أم تباعدية:

$$\sum a_k = \sum \frac{1}{\left[\frac{k+3}{4} \right]} \sin \left(\frac{\pi k}{2} \right),$$

حيث [x] ترمز إلى دالة أكبر عدد صحيح (ارشاد: فك s_n).

9 ـ أثبت معيار كوشي للمتسلسلات: المتسلسلة $\sum a_k$ تقاربية عندما وفقط عندما يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد N بحيث إن $n > m > N$ يؤدي إلى

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

2.9 اختبار المقارنة Comparison test

ندرس في هذا البند المتسلسلات التي تحقق حدودها الشرط $a_k \geqslant 0$ لكل k، ومثل هذه المتسلسلات تسمى بالمتسلسلات غير السالبة. وبالمثل إذا كانت $a_k > 0$ لكل k فإن $\sum a_k$ تسمى بالمتسلسلة الموجبة.

ويكمن أحد الأسباب الواضحة لدراسة هذه المتسلسلات في أنها تكون أسهل في العمل معها بالمقارنة مع المتسلسلات ذات الحدود الموجبة والسالبة (متعاقبة الإشارة).

والسبب الآخر هو أن الأعمال المبكرة التي تناولت المتسلسلات كانت مخصصة للمتسلسلات غير السالبة. ففي القرن الثامن عشر وأوائل القرن التاسع عشر أثبت بعض كبار علماء الرياضيات نظريات أعطت المعايير التي تحدد ما إذا كانت المتسلسلة غير السالبة تقاربية أم تباعدية. وهذه النتائج تعرف «باختبارات» تقارب المتسلسلات. وفي البداية نعطي نتيجة عامة ومفيدة للغاية:

نظرية مساعدة 9.2:

تكون المتسلسلة غير السالبة $\sum a_k$ تقاربية عندما وفقط عندما تكون متتالية مجاميعها الجزئية محدودة من أعلى.

البرهان:

من الواضح أن متتالية المجاميع الجزئية غير تناقصية. ومن ثم وفقاً لنظرية المتتالية المطّردة (نظرية 2.5) تكون $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_n$ تقاربية عندما وفقط عندما يوجد عدد B بحيث إنه لكل n يكون $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant B$.

ومن الواضح أنه إذا كانت المتسلسلة غير السالبة لاتقاربية فإنها تباعدية (نحو ∞). وأول اختبار للتقارب نقدمه هنا هو اختبار سهل الاثبات. ويستعان فيه بمفهوم الهيمنة (dominance): يقال ان المتسلسلة غير السالبة $\sum b_k$ تهيمن على المسلسلة غير السالبة $\sum a_k$ إذا وجد العددان B و N بحيث إن $k \geqslant N$ يؤدي إلى $a_k \leqslant B\, b_k$.

نظرية 9.1: اختبار المقارنة.

نفرض أن $\sum b_k$ و $\sum a_k$ متسلسلتان غير سالبتين بحيث تهيمن $\sum b_k$ على $\sum a_k$. إذا كانت $\sum b_k$ تقاربية فإن $\sum a_k$ أيضاً تقاربية. وإذا كانت $\sum a_k$ تباعدية فإن $\sum b_k$ أيضاً تباعدية.

البرهان:

نفرض أن $\sum b_k$ تقاربية وأن $\sum b_k$ تهيمن على $\sum a_k$. عندئذ وفقاً للنظرية المساعدة 9.1 يمكن أن نفرض أن $a_k \leqslant B\, b_k$ لكل k مما يعطي:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant B \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant B \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty.$$

ومن ثم فالمجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum a_k$ محدودة من أعلى ولذا فهي وفقاً للنظرية المساعدة 9.2 تقاربية.

والجزء الثاني من النظرية هو مجرد نفي (نقيض) (contrapositive) للجزء الذي أثبتناه.

مثال 9.4:

إن المتسلسلة $\sum \frac{1}{(2k-1)}$ تباعدية لأن

$$\frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k},$$

و $\sum \frac{1}{k}$ تباعدية.

ويكون من الصعب في كثير من الحالات أن نبرز معامل دقيق B لتكوين المتباينة $a_k \leqslant B\, b_k$ التي تبين علاقة الهيمنة.

نظرية 9.2: اختبار المقارنة بالنهايات (الاقترابي Asymptotic):

إذا كانت $\sum a_k$ ، $\sum b_k$ متسلسلتين غير سالبتين بحيث يكون $\lim_k \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = L > 0$ ، فإمّا أن تكون المتسلسلتان تقاربيتين معاً أو تباعديتين معاً.

البرهان:

بما أن $\lim_k \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = L$ ، فإنه يوجد عدد N بحيث إن $k > N$ يؤدي إلى:

$$\frac{L}{2} < \frac{a_k}{b_k} < 2L$$

أو $\left(\frac{L}{2}\right) b_k < a_k < 2Lb_k$.

وبذلك فإن $\Sigma\, a_k$ تهيمن على $\Sigma\, b_k$ و $\Sigma\, a_k$ تحت هيمنة $\Sigma\, b_k$. وتنتج النتيجة من نظرية 9.1 .

مثال 9.5:

المسلسلة $\Sigma \frac{(k-1)}{2k^2 + k + 7}$ تباعدية، لأن

$$\lim_k \frac{k-1}{2k^2 + k + 7} \cdot \frac{1}{1/k} = \lim_k \frac{k-1}{2k + 1 + 7/k} = \frac{1}{2}$$

وحيث إن $\frac{1}{k}$ تباعدية، نستنتج أن المتسلسلتين تباعديتان معاً.

9.3 اختبار التكثيف لكوشي

في مثال 9.3 بحثت المتسلسلة التوافقية بتجميع الحدود في متسلسلة أكثر تكثيفاً (more condensed) يمكن اختبارها بطريقة أسهل. وهذا الإجراء يمكن استخدامه في الحالات الأعم، وهذا هو محتوى النظرية التالية.

نظرية 9.3: اختبار التكثيف لكوشي.

إذا كانت $\Sigma\, a_k$ متسلسلة ذات حدود موجبة بحيث إن $\{a_n\}$ غير تزايدية، عندئذٍ تكون $\Sigma\, a_k$ تقاربية عندما وفقط عندما تكون المسلسلة $\Sigma\, 2^k a_{2k}$ تقاربية.

البرهان:

نأخذ المتتالية المُكوَّنة من 2^n عدداً:

$$\left\{a_{2^n} ، a_{1+2^n} ، \ldots\ldots ، a_{-1+2^{n+1}}\right\}$$

وحيث إن a_{2^n} هو أكبر عنصر في هـذه الفئة و $a_{2^{n+1}}$ أصغـر أو يساوي أي عنصر فيهـا فإنـه ينتج:

$$2^n a_{2^n} \geqslant \sum_{k=2^n}^{-1+2^{n+1}} a_k \geqslant 2^n a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad 2^{n+1} a_{2^{n+1}}$$

وبذلك فإن:

$$\sum_{n=0}^{m} 2^n a_{2^n} \geqslant \sum_{k=2^n}^{-1+2^{m+1}} a_k \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} 2^{n+1} a_{2^{n+1}}.$$

وبالتالي فإن المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\Sigma\, a_k$ محدودة عندما وفقط عندما تكون المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\Sigma\, 2^n a_{2^n}$ محدودة.

مثـــال 9.6:

تكون المتسلسلة $\frac{1}{k^p}$ تقاربية عندمـا وفقط عندمـا تكون $p > 1$. نـدرس المتسلسلة «المكثّفة»

$$\Sigma\, 2^k \; \frac{1}{(2^k)^p} = \Sigma\, 2^{k-kp} = \Sigma\, (2^{1-p})^k.$$

وهـذه متسلسلة هندسيـة ذات أساس مشـترك وهو 2^{1-p} . وبما أن $2^{1-p} < 1$ عندمـا وفقط عندما يكون $P > 1$ تنتج صحة المنطوق من النظرية 9.3 ومعلوماتنا عن المتسلسلة الهـندسية من مثال 9.1.

وعند تطبيق اختبارات المقارنة وحل الأمثلة عليها قد يتبادر إلى الذهن التسـاؤل عن وجود «متسلسلة شاملة عامـة لاختبار المقـارنة» أي تلك المسلسلة $\Sigma\, u_k$ التي تتبـاعد ببطء بحيث تهيمن عليها أية متسلسلة موجبة تباعدية.

ويطرح هذا السؤال بصورة أكثر دقة نقول: هل توجـد تلك المتسلسلة الموجبـة التباعـدية

$\sum u_k$ بحيث إنـه إذا كانت $\sum b_k$ متسلسلة مـوجبـة تحقق العـلاقـة $\lim_k \left(\frac{b_k}{u_k} \right) = 0$ فـإن $\sum b_k$ يجب أن تكـون تقـاربيـة. ومثـل هـذه المتسلسلة لـو وجـدت لكـانت ستصبح متسلسلة مثالية الاستخدام في اختبارات المقارنة.

ولسنـوات طويلة بحث علماء الـرياضيـات عن مثل تلك المتسلسلة، غـير أنه ثبت في عام 1827 أنه لا وجود لمثل هذه المتسلسلة الشاملة لاختبارات المقـارنة، وهـذه هي أهمية النـظرية التالية التي أثبتها في الأصل آبل Abel.

نظرية 9.4:

إذا كانت $\sum a_k$ متسلسلة موجبة تباعدية، فإنه توجد متسلسلة مـوجبة تبـاعديـة $\sum b_k$ بحيث إن $\lim_k \left(\frac{b_k}{a_k} \right) = 0$.

البرهان: نفرض أن:

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$$

ونعرّف $b_k = \frac{a_k}{s_k}$. عندئذ فإن

$$\lim_k \left(\frac{b_k}{a_k} \right) = \lim_k \left(\frac{1}{s_k} \right) = 0,$$

لأن $\sum a_k$ تباعدية.

ولكي نبيّن أن $\sum b_k$ تباعدية نبين أن مجاميعها الجزئية لا تُكوِّن متتالية كوشي. لأي m في $\mathbb{N}$ تسمح لنا لامحدودية $\{s_n\}$ باختيار $n > m$ بحيث يكون $s_n > 2s_m$ عندئذ:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{m-1} b_k = \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{s_u}$$

$$= \sum_{k=m}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{s_k} \geqslant \frac{1}{s_n} \sum_{k=m}^{N} (s_k - s_{k-1})$$

$$= \frac{1}{s_n} \{s_n - s_{m-1}\} > \frac{1}{s_n} \left\{ \frac{s_n}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

ومن ثم فإن $\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ ليست متتالية كوشي مما يؤدي إلى أن $\sum b_k$ تباعدية.

وفي محاولة تعيين تقارب أو تباعد متسلسلة معطاة فإن واحدة من أصعب المسائل التي تقابلنا هي إيجاد الاختبار (أو الاختبارات) المناسبة التي تؤدي إلى الجواب على السؤال لهذه المتسلسلة. ولهذا الغرض نؤجل مجموعة المسائل حتى نهاية بند 9.5 حيث نكون قد عرضنا كل اختباراتنا لتقارب المتسلسلات غير السالبة.

9.4 الاختبارات الأولية

تقدم النظريات الثلاث التالية الاختبارات الشائعة للتقارب التي تعرف عليهاالطالب في منهج حساب التفاضل والتكامل، وهي سهلة الإثبات والتطبيق، ولكنها تعطى الإجابة فقط لأنواعٍ خاصة من المتسلسلات.

وبالطبع فإنه يمكن توجيه النقد إلى أي اختبار للتقارب، وهذا النقد يتعلّق بمحدودية قابليته للتطبيق. وسبب وجود عدد كبير من اختبارات التقارب (وسندرس عدداً قليلاً منها) هو أنه لا يوجد اختبار واحد يمكن أن يبين تقارب أو تباعد كل متسلسلة. ويمكن التأكيد على أن أية متسلسلة تتقارب عندما وفقط عندما تكون لمجاميعها الجزئية متتالية كوشي (قارن مع تمرين 9.5.1)، غير أن هذا ليس معياراً واقعياً للاختبار. إنّ تحديد ما إذا كانت المتتالية تحقق معيار كوشي يتضمن الصعوبة نفسها مثل اختبار ما إذا كانت المتتالية تحقق شروط تعريف التقارب.

نظرية 9.5 اختبار التكامل Integral Test:

نفرض أن $\sum a_k$ متسلسلة موجبة ذات دالة لاتناقصية f بحيث أنه لكل k يكون $f(k) = a_k$ عندئذ فإن $\sum a_k$ تقاربية عندما وفقط عندما يكون التكامل المعتل $\int_1^{\infty} f$ تقاربياً.

البرهان:

إذا كان $k \leqslant x \leqslant k+1$ فإن:

$$a_k = f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1) = a_{k+1}.$$

وبذلك فإن:

$$a_k = \int_k^{k+1} a_k \geqslant \int_k^{k+1} f \geqslant \int_k^{k+1} a_{k+1} = a_{k+1}.$$

(لاحظ أن f قابلة للتكامل لأنها مطّردة) وبذلك فإن:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f = \int_1^{n+1} f,$$

و

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \leqslant a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f = a_1 + \int_1^{n} f.$$

ومن ثم فإن $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$ محدودة من أعلى إذا وفقط إذا كانت: $\lim_{b\to\infty} \int_1^b f < \infty.$

مثـــال 9.7:

المتسلسلة $\sum \frac{1}{(k \log k)}$ تباعدية. ندرس التكامل:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x} = \lim_{b\to\infty} \left[\log(\log x)\right]_2^b = \infty.$$

ومن ثم فإن التكامل والمتسلسلة تباعديتان.

وقد كاملنا في هذا المثال على الفترة $[2, \infty)$ بدلاً من $[1, \infty)$ لتجنب صعوبة تعريف $\log(\log 1)$، وإهمال الحدود الأولى لا يؤثر على تقارب أو تباعد المتسلسلة.

نظرية 9.6: اختبار النسبة. (Ratio test)

نفرض أن $\sum a_k$ متسلسلة موجبة بحيث إن $\lim_k \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = L$؛ عندئذ:

$L < 1$ تتضمّن أن $\sum a_k$ تقاربية

$L > 1$ تتضمّن أن $\sum a_k$ تباعدية

وإذا كان $L = 1$ فإن $\sum a_k$ قد تكون تقاربية أو تباعدية.

البرهان:

أولاً نفرض أن $L < 1$ ونختار عدداً r بحيث يكون $L < r < 1$. عندئذ يوجد عدد N بحيث إن $k \geqslant N$ يؤدي إلى $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant r$ وبذلك فإن:

$a_{N+1} < ra_N,$

$a_{N+2} \leqslant ra_{N+1} \leqslant r(ra_N) = r^2 a_N,$

$a_{N+3} \leqslant ra_{N+2} \leqslant r(r^2 a_N) = r^3 a_N,$

.

.

.

$a_{N+m} \leqslant ra_{N+m-1} \leqslant r(r^{m-1} a_N) = r^m a_N.$

ومن ثم فإن Σa_k تكون تحت «هيمنة» مضاعف المتسلسلة الهندسية التقاربية Σr^k . وبذلك وفقاً لاختبار المقارنة تكون Σa_k تقاربية. وبعد ذلك ندرس حالة $L > 1$. وهذا يضمن أنه يوجد عدد N' بحيث إن $k \geqslant N'$ يتضمّن $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1$ ، وهذا يكافىء $a_{k+1} \geqslant a_k$. وبذلك فإن $k \geqslant N'$ يتضمّن $a_k \geqslant a_N > 0$ ومن هنا فإن نهاية $\{a_k\}$ ليست صفراً، ومن هنا وفقاً للمفترض تكون Σa_k تباعدية.

وأخيراً فإن التباس الحالة $L = 1$ يمكن توضيحه على المسلسلة $\Sigma \frac{1}{k^p}$. فلأي قيمة للعدد p نحصل على:

$$\lim_k \frac{\frac{1}{(k+1)^p}}{\frac{1}{k^p}} = \lim_k \left| \frac{k}{k+1} \right|^p = 1^p = 1;$$

ولكننا رأينا في مثال 9.6 أن هذه المتسلسلة تقاربية إذا كان $p > 1$ ، وتباعدية إذا كان $p \leqslant 1$.

واختبار النسبة قابل للتطبيق للمتسلسلة سريعة التقارب أو سريعة التباعد، مثل تلك المتسلسلات التي تحتوي على عوامل أسية أو صيغ المضروب.

مثــال 9.8:

المتسلسلة $\sum \frac{r^k}{(k!)}$ تقاربية لأي عدد حقيقي r؛ لأنه بتطبيق اختبار النسبة نرى أن:

$$\lim_k \frac{\frac{r^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{r^k}{(k!)}} = \lim_k \frac{r}{k} = 0.$$

نظرية 9.7: اختبار الجذر. (root test)

نفرض أن $\sum a_k$ متسلسلة غير سالبة بحيث تكون $\lim_k (a_k)^{1/k} = L$ ، عندئذ فإن $L < 1$ تتضمّن أن $\sum a_k$ تقاربية، $L > 1$ تتضمّن $\sum a_k$ تباعدية.

وإذا كان $L = 1$ فإن $\sum a_k$ يمكن أن تكون إما تقاربية وإما تباعدية.

البرهان:

انظر تمرين 9.5.1.

9.5 الاختبارات المدققة (Delicate Tests)

تؤدي الحالة الغامضة (غير الحاسمة) في النظريتين 9.7، 9.6 حيث

$\lim_k \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = 1$ و $\lim_k (a_k)^{1/k} = 1$ إلى التساؤل عما إذا كانت هناك طريقة ما لتدقيق اختبار النسبة بحيث يعطي إجابة حتى لو كانت نهاية النسبة مساويةً لـ 1.

على سبيل المثال، يمكن أن نتساءل بأية سرعة يؤول $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ إلى 1؟ يمكننا أن نختبر نهاية الصيغة غير المعيّنة $k \left\{ \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right) - 1 \right\}$ ، ويمكن أن تعطينا قيمة نهايتها مؤشراً حول ما إذا كانت النسبة $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ ذات نزعة في اتجاه أن تكون أكبر من 1 (مما يدل على التباعد) أو أصغر من 1 (مما يدل على التقارب). وهذا هو هدف الاختبار القادم.

نظرية 9.8: اختبار كومر (Kummer's Test).

نفرض أن $\sum a_k$ متسلسلة موجبة وأن $\{p_k\}$ متتالية موجبة بحيث يكون:

$$\lim_k \left\{p_k \frac{a_{k+1}}{a_k} - p_{k+1}\right\} = L. \qquad (1)$$

فإذا كان $L > 0$ فإن $\sum a_k$ تقاربية

إذا كان $L < 0$ و $\sum \frac{1}{p_k}$ تباعدية فإن $\sum a_k$ تكون تباعدية.

البرهان:

نفرض أولاً أن $L > 0$ ونختار r يحقق المتباينة $0 < r < L$. عندئذٍ لبعض N حيث $k \geqslant N$ يكون:

$$p_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - p_{k+1} > r.$$

ومن ثم

$$P_N a_N - P_N a_{N+1} > ra_{N+1},$$

$$P_{N+1} a_{N+1} - P_{N+2} a_{N+2} > ra_{N+2},$$

.

.

.

$$P_{N+m-1} a_{N+m-1} - P_{N+m} a_{N+m} > ra_{N+m}.$$

وإذا جمعنا هذه المتباينات، فإن الحدود في الطرف الأيسر تختصر زوجاً زوجاً إلا الحدين الأول والأخير ونحصل على المتباينة:

$$P_N a_N - P_{N+m} a_{N+m} > r \sum_{k=N+m}^{N+1} a_k. \qquad (2)$$

وإذا كان $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ فإن (2) تصبح $P_N a_N - P_{N+m} a_{N+m} > r \{s_{N+m} - s_N\}$

أو $rs_{N+m} < rs_N + p_N a_N - P_{N+m} a_{N+m} < rs_N + P_N a_N$

ومن ثم فلكل m في $\mathbb{N}$ نحصل على:

$$s_{N+m} < s_N + \left(p_N \frac{a_N}{r}\right);$$

وبذلك فإن $\{s_n\}$ محدودة من أعلى وبالتالي فإن Σa_k تقاربية. والآن نفرض أن $L < 0$ ونختار N بحيث أن $k \geqslant N$ يؤدي إلى:

$$p_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - p_{k+1} \leqslant 0.$$

وعندئذ فإن $k \geqslant N$ يؤدي إلى أن $P_k a_k \leqslant P_{k+1} a_{k+1}$ ، ومن ثم فإن:

$p_N \ a_N \leqslant p_{N+1} \ a_{N+1} \leqslant \ldots \leqslant p_m \ a_m$ (طالما $m > N$) وبذلك فإن $a_m \geqslant p_N \frac{a_N}{p_m}$ ، ولذا فإن Σa_m تهيمن على $\frac{1}{p_k}$. ووفقاً لاختبار المقارنة ينتج من تباعد المتسلسلة $\sum \frac{1}{p_k}$ تباعد Σa_k ، بذلك يتمّ البرهان.

نتيجة 9.8: اختبار رابي (Rabbe's Test):

نفرض أن Σa_k متسلسلة موجبة بحيث يكون:

$$\lim_k \left\{k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right)\right\} = L.$$

فإذا كان $L > 1$ فإن Σa_k تقاربية.

وإذا كان $L < 1$ فإن Σa_k تباعدية.

وإذا كان $L = 1$ فإن Σa_k قد تكون إما تقاربية أو تباعدية.

البرهان:

نُطبّق اختبار كومر مع أخذ $p_k = k$.

ونترك التفاصيل كتمرين (تمرين 9.5.3).

مثـــال 9.9:

المسلسلة التالية متباعدة:

$$\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots \frac{1.\ 3.\ 4 \dots (2k-1)}{2.\ 4.\ 6 \dots (2k)} + \dots$$

أولاً بواسطة اختبار المقارنة لدينا:

$$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_k \frac{2k+1}{2k+2} = \lim_k \frac{1+\left(\frac{1}{k}\right)}{2+\left(\frac{2}{k}\right)} = 1.$$

ولذا لا يؤدي الاختبار إلى نتيجة. والآن تطبق اختبار رابي:

$$k\left\{\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right\} = k\left\{\left[\frac{2k+2}{2k+1}\right] - 1\right\}$$

$$= k\left\{\frac{2k+2-(2k+1)}{2k+1}\right\} = \frac{k}{2k+1}$$

وبما أنّ $\lim_k \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2}$ ، فإن اختبار رابي يبين أن المتسلسلة تباعدية.

تماريـــن 9.5

1 ـ برهن اختبار الجذر (نظرية 9.7) (ارشاد: انظر برهان اختبار النسبة، نظرية 9.6).

2 ـ أثبت أنه إذا كانت $\sum a_k$ مسلسلة موجبة فإن: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_n \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$.

3 ـ برهن اختبار رابي (نتيجة 9.8).

4 ـ أثبت إذا كانت $\sum a_k$ متسلسلة موجبة تقاربية، فإن $\sum a_n^2$ تكون أيضاً تقاربية. بيّن بمثال أن $\sum a_k$ يمكن أن تكون تقاربية (ولكن غير موجبة) بينما $\sum a_n^2$ تباعدية.

التمرينات 5.6 امتداداً لاختبار المقارنة الاقترابي (بالنهايات):

5 ـ أثبت انه إذا كانت Σa_k ، Σb_k متسلسلتين موجبتين بحيث تكون Σb_k تقاربية و $\lim_k \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = 0$ ، فإن Σa_k تقاربية أيضاً.

6 ـ أثبت أنه إذا كانت Σa_k و Σb_k متسلسلتين موجبتين بحيث تكون Σa_k تباعدية و $\lim_k \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \infty$ ، فإن Σa_k تباعدية أيضاً.

حدد التقارب أو التباعد لكل من المتسلسلات التالية:

7 ـ $\Sigma \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}}$

8 ـ $\Sigma \frac{1}{K(\log K)^p}$

9 ـ $\Sigma k \frac{r^k}{k!}$

10 ـ $\Sigma \frac{1}{k \log k \{\log(\log k)\}^p}$

11 ـ $\Sigma \frac{k^3 (k+1)^k}{(2k)^k}$

12 ـ $\Sigma \frac{1}{\sqrt{k^3 - 4}}$

13 ـ $\Sigma \frac{k!}{k^k}$

14 ـ $\Sigma \frac{1}{(\log k)^k}$

15 ـ $\Sigma \frac{k + 3^k}{5^k}$

16 ـ $\Sigma k e^{-k^2}$

17 ـ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots\dots$

18 ـ $\frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \dots$

19 ـ $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^p + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^p + \dots$

20 ـ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right) \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right) \cdot \frac{1}{7} + \dots$

9.6 التقارب المُطْلَق والتقارب الشَرْطِيّ

نـدرس في هذا البنـد المتسلسلات ذات الحـدود الموجبـة والسالبـة، والشيء الأول الـذي سنفعله هـو فصـل تلك المسلســلات التي تتقـارب بصرف النـظر عن اختـلاط (تعـاقب الاشارات.

تعريف 9.2:

يقال للمتسلسلة إنّها تتقارب تقارباً مطلقاً إذا كانت $\Sigma |a_k|$ تقاربية.

وإذا كانت Σa_k تقاربية ولكن $\Sigma|a_k|$ تباعـدية عنـدئذ تسمى Σa_k متقـاربة شرطي (تقارباً مشروطاً).

وكـما سترى في النـظرية التـاليـة فـإن التقـارب المـطلق للمتسلسلة Σa_k يعني أن Σa_k تقاربية؛ ولذا فإن احدى إيجابيات التقارب المطلق واضحة: إنه يسمح لنـا بتحديـد التقارب باستخدام الاختبارات الواردة في البنـد السابق للمتسلسـلات غير السـالبة $\Sigma |a_k|$. غـير أ هذه الأوضاع المناسبة لا تظهر دائـماً، فهناك متسلسـلات تقاربيـة (شرطياً) Σa_k تكـون ف $\Sigma |a_k|$ تباعدية.

والمتسلسلة في المثـال 9.2 هي من هذا النـوع. لقد رأينـا أن المتسلسلة تقاربيـة إلى المجمو $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0$.

ولكن:

$$\Sigma |a_k| = 1 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \ldots$$

ولذا فلكل n نحصل على:

$$_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} |a_k| = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

وحيث أن $\frac{1}{k}$ تباعدية ينتج أن $\Sigma |a_k|$ تباعدية.

نظرية 9.9:

إذا كانت Σa_k مطلقة التقارب فإن Σa_k تقاربية.

البرهان :

حيث إن $\sum |a_k|$ تقاربية فإن مجاميعها الجزئية تُكوِّن متتالية كوشي. إذا كان $n > m$ فإنه يمكننا كتابة :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \geqslant \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right|. \tag{1}$$

والطرف الأيسر هو الفرق بين المجموعين الجزئيين الـ n، والـ m للمتسلسلة $\sum |a_k|$ ، ولذا وفقاً لمعيار كوشي فإنه يؤول (الفرق) إلى الصفر عندما تؤول m و n إلى ∞ .

والطرف الأيمن من السطر الأخير من (1) هو القيمة المطلقة للفرق بين المجموعين الجزئيين الـ n والـ m للمتسلسلة $\sum a_k$ ، وحيث إنه أيضاً يجب أن يؤول إلى الصفر عندما m، n تؤولان إلى ∞، فإن المجاميع الجزئية للمسلسلة $\sum a_k$ تُكوِّن متتالية كوشي. وبالتالي فإن $\sum a_k$ تقاربية.

وحتى الآن لا توجد اختبارات للتقارب الشَرْطيّ.

في البداية نختبر $\sum |a_k|$ لتحديد ما إذا كانت $\sum a_k$ تقاربية مطلقاً. إذا كانت $\sum |a_k|$ تباعدية، فإننا نحاول أن نكتشف التقارب (الشرطي) أو اللاتقارب للمتسلسلة $\sum a_k$ بالاستعانة بخواص هذه المتسلسلة المعينة. على سبيل المثال إذا كان $\lim a_k \neq 0$ فإن $\sum a_k$ ووفقاً للمفترض 9.1 لا يمكن أن تكون تقاربية.

وفي النظريتين التاليتين نقدم بعض الأساليب المفيدة في تحديد التقارب الشرطيّ، وسنثبت أولاً نظرية مساعدة تعرّف أحياناً بالتجميع بالتجزيء. ونتج هذا المصطلح من تشابهها مع عملية التكامل بالتجزيء.

نظرية مساعدة 9.3:

إذا كانت كل من $\{b_k\}$ ، $\{a_k\}$ متتالية عددية $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ يكون لكل n:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k (b_{n+1} - b_k). \tag{2}$$

البرهان :

إذا عرفنا $s_0 = 0$ نجد لكل k من $\mathbb{N}$ ان $a_k = s_k - s_{k-1}$. وبالتالي فإن :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k$$

$$= b_1 (s_1 - s_0) + b_2 (s_2 - s_1) + \dots + b_n (s_n - s_{n-1})$$

$$= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \dots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + b_n s_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1} + s_n b_n - s_n b_{n+1} + s_n b_{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n (b_n - b_{n+1}) + s_n (b_n - b_{n+1}) + s_n b_{n+1}$$

$$= s_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k (b_{k+1} - b_k).$$

وقد اكتشفت طريقة التجميع بالتجزيء بواسطة آبل الذي استخدمها بشكل مكثف. وتتضح فائدتها في النظرية التالية :

نظرية 9.10 اختبار آبل :

إذا كانت المتسلسلة $\sum a_k$ ذات مجاميع جزئية محدودة وكانت $\{b_k\}$ متتالية غير تزايدية صفرية (null) فإن $\sum a_k b_k$ تقاربية.

البرهان :

نبين أن المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum a_k b_k$ تكوّن متتالية كوشي. نفرض أن

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ، $M = \text{lub}\,\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ و $n > m$.

والآن بتطبيق النظرية المساعدة 9.3 على المتتاليتين $\{a_k\}_{k=m}^{\infty}$ و $\{b_k\}_{k=m}^{\infty}$

نجد

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| = \left|s_n b_{n+1} - \sum_{k=m}^{n} s_k (b_{k+1} - b_k)\right| \leq \left|s_n b_{n+1}\right| + \sum_{k=m}^{n} |s_k| \left|b_{k+1} - b_k\right|.$$

وبما أن $\{b_k\}$ غير تزايدية يكون لدينا:

$|b_{k+1} - b_k| = b_k - b_{k+1}$ ، ولذا فإن:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right|$$

$$\leqslant |s_n b_{n+1}| + \sum_{k=m}^{n} |s_k| (b_k - b_{k+1}) \leqslant Mb_{n+1} + M \sum_{k=m}^{n} (b_k - b_{k+1})$$

$$= Mb_{n+1} + M \left\{b_m - b_{n+1}\right\} = Mb_m.$$

وبما أن $\lim_m b_m = 0$ ، إذن ينتج $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي، ومن ثم فإن $\Sigma a_k b_k$ تقاربية.

وتتعامل النظرية التالية مع فصل (class) خاص من المتسلسلات ذات الحدود الموجبة والسالبة. في هذا الفصل يكون للمتسلسلة حدود موجبة وسالبة تتعاقب في ترتيب ظهورها، ولذا فهي تسمى بالمتسلسلة متعاقبة الاشارة أو بالمتسلسلة المتعاقبة.

نظرية 9.11: نظرية المتسلسلات المتعاقبة: (Alternative series)

إذا كانت $\{a_k\}$ متتالية لاتزايدية صفرية فإن المتسلسلة $\Sigma (-1)^{k+1} a_k$ تقاربية.

البرهان:

هذه الخلاصة هي نتيجة سهلة لاختبار آبل. المتسلسلة $\Sigma (-1)^{k+1}$ لها مجاميع جزئية محدودة كما هو واضح، وتكون $\{a_k\}$ متتالية لاتزايدية صفرية من الفرض، وبذلك فالمتسلسلة $\Sigma (-1)^{k+1} a_k$ ، وفقاً للنظرية 9.10، تقاربية.

مثـال 9.10:

المتسلسلة التوافقية متعاقبة الإشارة $\Sigma \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ تقاربية تقارباً شرطياً. نعرف من المثال 9.3 أن هذه المتسلسلة لا يمكن أن تكون تقاربية تقارباً مطلقاً، وهي تحقق ـ كما هو واضح ـ فروض النظرية 9.11 وبالتالي فهي متسلسلة متعاقبة وتقاربية شرطيًا.

9.6 تمارين

حدِّد التقارب المطلق أو الشرطيّ أو اللاتقارب لكلٍ من المتسلسلات في التمارين 1-8.

1 - $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{\log (k+1)}$

2 - $\sum \frac{1}{k+1} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$

3 - $\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{k+1}$

4 - $\sum (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2+1}$

5 - $\sum (-1)^{k+1} \frac{k^2}{k^5+1}$

6 - $\sum \left(\frac{\log k}{k^2}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$

7 - $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\left(\log [k+1]\right)^2}$

8 - $\sum (-1)^{k+1} \left(\frac{3}{e}\right)^k$

9 - نفرض أن $\sum (-1)^{k+1} a_k$ متسلسلة متعاقبة كما في النظرية 9.11: أي أن $\lim_k a_k = 0$ ، ولكل k يكون:

$a_{k+1} \geqslant a_k \geqslant 0$ ، نفرض أن $\{s_k\}$ هي متتالية المجاميع الجزئية. أثبت التأكيدات التالية (التي تكوِّن برهاناً آخر للنظرية 9.11):

(a) المتتالية الجزئية $\{s_{2n}\}$ لا تناقصية.

(b) المتتالية الجزئية $\{s_{2n-1}\}$ لا تزايدية.

(c) لكل n يكون $|s_n - s_{n-1}| \leqslant a_n$.

(d) $\sum (-1)^k a_k$ تقاربية ولكل n يكون:

$$\left|s_n - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k\right| < a_k.$$

9.7 اعادة تجميع واعادة ترتيب المتسلسلات

إذا اعتبرنا المتسلسلة اللانهائية امتداداً لعملية الجمع، فإن هنـاك أسئلة طبيعية تتبـادر إلى الذهن. إن خواصاً مثل التنسيق والتبديل يمكن صياغتها للمتسلسلات اللانهائية كما يلي:

(i) إذا أعيد تجميع حدود المتسلسلة a_k بإدخال أقواس، فهل يظل التقارب أو التباعد دون تغيير؟

(ii) إذا أعيـد ترتيب حـدود $\Sigma\, a_k$ فكتبت في ترتيب آخـر، فهل يـظل التقارب أو التبـاعد دون تغيير؟

إنّ الإجابة على السؤال الأول سهلة، وهي معطاة في المفترض التالي، أما موضـوع اعادة الترتيب فيتطلب عملاً أكثر.

مفترض 9.2:

إذا كـانت $\Sigma\, a_k$ تقاربيـة و $\Sigma\, b_k$ هي المتسلسلة الناتجـة عن اعادة تجميـع حـدود $\Sigma\, a_k$ وذلك بإدخال أزواج من الأقواس، فإن $\Sigma\, b_k$ تقاربية أيضاً و

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

البرهان:

ينتج التأكيد مباشرة من مـلاحظة أن المجـاميع الجـزئية للمتسلسلة $\Sigma\, b_k$ تُكـوِّن متتاليـة جزئية من متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\Sigma\, a_k$.

مثـال 9.11:

ندرس المتسلسلة:

$$\Sigma\, a_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

و

$$\Sigma\, b_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

ونرى أن Σb_k هي اعادة تجميع المتسلسلة Σa_k، وإذا كان $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ فإن s_{2n} هي المجموع الجزئي النوني (n) للمتسلسلة $\Sigma\, b_k$.

ولبحث موضوع إعادة ترتيب حدود المتسلسلة نعطي في البداية تعريفاً دقيقاً للمفهوم.

تعريف 9.3:

المتسلسلة Σb_k هي اعادة ترتيب (rearrangement) للمتسلسلة Σa_k إذا وجدت دالة أحادية (one-to-one) π من $\mathbb{N}$ فوقياً إلى $\mathbb{N}$ بحيث يكون:

$$b_k = a_{\pi(k)} \quad \text{لكل} \quad k.$$

إن اشتراط أن π ترسم (تعكس ـ map) $\mathbb{N}$ فوقياً إلى $\mathbb{N}$ يضمن أن كل حدّ من Σa_k يظهر (على الأقل مرة واحدة) في Σb_k، واشتراط أن π هي أحادية يؤكد أنه لا يوجد حد من Σa_k يظهر أكثر من مرة واحدة في Σb_k. وإذا كانت Σb_k تعيد ترتيب عدد محدود فقط من حدود Σa_k فإنه يتضح من النظرية المساعدة 9.1 أن Σb_k تقاربية عندما وفقط عندما تكون Σa_k تقاربية، وأيضاً فمن السهل أن نرى أن اعادة الترتيب المحدودة هذه تؤدي إلى $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. وهذا لا يكون صحيحاً لكل عمليات إعادة الترتيب كما سنرى في المثال التالي.

مثال 9.12:

يمكن اعادة ترتيب حدود المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ التقاربية تقارباً شرطياً لتعطي متسلسلة أخرى تقاربية شرطياً حيث مجموعها

$$\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

نأخذ المتسلسلة:

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right)$$

$$= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \ldots$$

$$= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \ldots$$

$$\stackrel{?}{=} 2 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} - \dots$$

$$= (2-1) - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

ان خطوات مضاعفة كل حدّ تنتج كسوراً، واعادة التجميع صحيحة، ولذا فإن المتساوية ليست صحيحة حيث وضعت علامة الاستفهام، وهي الخطوة التي عندها تمت عملية اعادة الترتيب.

وتبين النظرية التالية أن مثال 9.12 لا يبين إلا إحدى عمليات اعادة الترتيب الممكنة التي تعطي مجموعاً مختلفاً للمتسلسلة التوافقية المتعاقبة.

نظرية 9.12:

إذا كانت Σa_k متسلسلة تقاربية تقارباً شرطياً وكان L أي عدد حقيقي فإنه توجد متسلسلة ناتجة عن اعادة ترتيب Σa_k ويكون مجموعها هو L.

البرهان:

نفرض أن $\{p_k\}$ هي متتالية جزئية من $\{a_k\}$ مُتكوِّنة من كل الحدود الموجبة، ونفرض أن $\{-q_k\}$ متتالية جزئية من $\{a_k\}$ مُتكوِّنة من كل الحدود غير الموجبة.

ونؤكد وجوب أن يكون كلٌّ من Σq_k و Σp_k متسلسلة تباعدية، لأنها إذا كانتا تقاربيتين فإن:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} p_k + \sum_{k=1}^{\infty} q_k,$$

ومن ثم لكانت Σa_k تقاربية مطلقاً. وأيضاً إذا كانت احدى المتسلسلتين Σp_k أو Σq_k تقاربية والأخرى تباعدية لكانت Σa_k غير تقاربية شرطياً؛ لهذا نفرض أن $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty$

و $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = Q$ عندئذ لكل عدد B يوجد عدد N بحيث إن $n > N$ يؤدي إلى :

$$\sum_{k=1}^{m} p_k > B + Q,$$

مما يؤدي إلى :

$$\sum_{k=1}^{m} a_k > \sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{\infty} q_k > (B + Q) - Q = B$$

لقيم m الكبيرة كبراً كافياً. ولذا فإن Σa_k غير تقاربية وبالمثل إذا كانت $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = P$ ، $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = \infty$ فإنه يمكن الحصول على $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ تكون أصغر من أي عدد سالب محدد مُسبقاً.

والآن نستعين بتباعد Σq_k ، Σp_k لنكوّن اعادة ترتيب للمتسلسلة Σa_k يتقارب إلى L. في البداية نختار $n(1)$ بمثابة أصغر عدد صحيح يحقق المتباينة

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n(1)} > L.$$

(إذا كانت $L \leqslant 0$ نختار $n(1) = 0$ ، ومن ثم لن توجد الحدود p_k من هذه المجموعة). بعد ذلك نختار $q_1 \dots q_{n(2)}$ بحيث يكون $n(2)$ هو أصغر عدد صحيح يحقق :

$$p_1 + \dots + p_{n(1)} - q_1 - q_2 - \dots - q_{n(2)} < L.$$

ونحن نعلم بأن هناك عدداً كافياً من الـ p_k والـ q_k للوصول إلى هاتين المتباينتين؛ لأن $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty$ ، $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = \infty$. وعندئذ تستمر العملية بالاستقراء:

وبمجرد أن يزيد المجموع الجزئي عن L نبدأ في ادخال الحدود السالبة التالية التي لم تستخدم بعد حتى يصل المجموع الجزئي إلى قيمة أقل من L. وبهذه الطريقة نستخدم كل حدود المتسلسلتين Σq_k ، Σp_k ، والمجاميع الجزئية للمتسلسلة المعاد ترتيبها تتذبذب حول L.

وعلاوة على ذلك، فبمجرد أن نتقدم بعد $p_{n(j)}$ فإن المجاميع الجزئية لا تختلف عن L بأكثر من $\max\{P_{n(j)}، q_{n(j-1)}\}$. وهذا صحيح لأن n(j) مختار بحيث يكون أصغر عدد صحيح تتحقق عنده المتباينة. ولكن Σa_k تقاربية؛ ولذا فإن $\lim_k a_k = 0$. ولذلك فإن q_k و p_k يجب أن يؤول كلاهما إلى الصفر، ولذا فإن المجاميع الجزئية للمتسلسلة - إعادة الترتيب - يجب أن تتقارب إلى L. ونرى في النظرية التالية - التي أثبتها لأول مرة دير شليتْ Dirchlet - أن المتسلسلة المطلقة التقارب لا تتأثر بإعادة ترتيب حدودها.

نظرية 9.13:

إذا كانت Σa_k متسلسلة مطلقة التقارب وكانت $\Sigma a_{\pi(k)}$ إعادة ترتيب للمتسلسلة Σa_k فإن $\Sigma a_{\pi(k)}$ مطلقة التقارب و

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

البرهان:

نستعين بالرموز:.

$$p_k = \max\{a_k ، 0\} \quad \text{و} \quad a_k = \min\{q_k ، 0\}.$$

ولا بد هنا من كلمة تحذير: وهي أن هذه التعريفات لـ q_k ، p_k ليسا مشابهين لما سبق استخدامه في برهان النظرية 9.12. والآن يكون لدينا:

$$a_k = p_k + q_k \quad \text{و} \quad |a_k| = p_k - q_k.$$

وحيث إن $\Sigma|a_k|$ تقاربية فمن السهل أن نرى أن كلاً من Σq_k ، Σp_k مطلقة التقارب. وأيضاً إذا كان:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad \text{و} \quad Q = \sum_{k=1}^{\infty} q_k,$$

فإن:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = P + Q.$$

وحيث إن $a_{\pi(k)} = P_{\pi(k)} + q_{\pi(k)}$ فإننا نرى أن $\Sigma\, p_{\pi(k)}$ تنتج بتكوين متسلسلة - معادة الترتيب - من الحدود غير السالبة من $\Sigma\, a_k$ وإدخال أصفار عندما $a_{\pi(k)} < 0$.

وبذلك فإنّ كل مجموع جزئي من $\Sigma p_{\pi(k)}$ سيحقق:

$$\sum_{k=1}^{m} p_{\pi(k)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} p_k = P$$

وعلاوة على ذلك، فحيث إن كل p_k يظهر في مكان ما كحد في $\Sigma p_{\pi(k)}$، ينتج أن p تساوي أصغر حد أعلى لهذه المجاميع الجزئية. ولذا فمن نظرية المتتالية المطردة نحصل على:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{\pi(k)} = P.$$

وبالمثل

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_{\pi(k)} = Q,$$

ولذا فإن

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} (p_{\pi(k)} + q_{\pi(k)}) = P + Q.$$

وأخيراً، فإن $\Sigma a_{\pi(k)}$ مطلقة التقارب، لأن كلاً من $\Sigma p_{\pi(k)}, \Sigma q_{\pi(k)}$ مطلقة التقارب ويكون:

$$|a_{\pi(k)}| = p_{\pi(k)} - q_{\pi(k)}.$$

9.8 ضرب المتسلسلات

إن مفهوم مجموع متسلسلتين هو مفهوم سهل لدرجة أنّنا اعتبرناه أمراً مسلماً به ومضموناً في بعض إثباتاتنا السابقة في هذا الباب. إذا كان كلٌّ من Σb_k، Σa_k متسلسلة فإن مجموعهما هو المتسلسلة $\Sigma(a_k + b_k)$، المتكونة بجمع الحدود المناظرة، أي أن الحد رقم k من هذا المجموع هو مجموع الحدين رقم k من المتسلسلتين. ومن الواضح أن كل مجموع جزئي يحقق المتساوية:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

وبذلك ينتج من النظرية 2.3. المتعلقة بمجموع المتتاليات المتقاربة، إن تقارب Σb_k، Σa_k يؤدي إلى تقارب مجموعهما $\Sigma(a_k + b_k)$ وأن:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

ومرة أخرى فإن المسألة هي مجرد تغيير لتوكيدنا من المتتالية $\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right\}$ إلى المتسلسلة Σa_k. وكما قلنا في بداية هذا الباب فإن نظرية تقارب المتتاليات تنفي حاجتنا لبرهان آخر لنظريات المتسلسلات التي تكون مجرد تعبير آخر لنظريات المتتاليات.

وفي صياغة مفهوم ضرب المتسلسلات لا يصح التشابه المتوقع بالدرجة نفسها. يمكننا أن نكوّن حاصل ضرب متسلسلتين حداً بحد، فيكون $\Sigma a_k\, b_k$.

وهذا النوع من الضرب يصلح جيداً للمتتاليات، ولكن عند التعامل مع المتسلسلات سيدخل قانون التوزيع. ولتوضيح المسألة نفرض أن Σb_k ، Σa_k متسلسلتان وندرس حاصل الضرب الداخلي (Inner product) لهما وهو المتسلسلة $\Sigma a_k b_k$. إن تقارب متسلسلة حاصل الضرب هذه يتحدد بتقارب المتتالية $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ ، والمجموع الجزئي النوني $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ لا يساوي بوجه عام حاصل ضرب المجموعين الجزئيين $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ، $\sum_{k=1}^{n} b_k$. وبذلك فلا يمكن أن نكوّن صلة وثيقة بين المجموع $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ والمجموعين $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. ومن السهل أن نثبت أنه إذا كانت Σa_k تقاربية وكانت Σb_k مطلقة التقارب فإن $\Sigma a_k b_k$ مطلقة التقارب (انظر تمرين 9.8.6). ولكن إذا كانت كل من Σa_k ، Σb_k تقاربية شرطياً فلا يمكننا التأكيد بأن $\Sigma a_k b_k$ تقاربية (مطلقاً أو شرطياً). والمثال التالي يبين لنا صحة ما قلناه.

مثال 9.13:

تتقارب المتسلسلة $\Sigma \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ تقارباً شرطياً في حين أن حاصل الضرب الداخلي لهذه المتسلسلة في نفسها هو المتسلسلة $\Sigma \frac{1}{k}$ وهي تباعدية.

ومن المفيد أن تكون عملية ضرب المتسلسلات مُعرّفة بحيث يكون حاصل ضرب المجاميع مساوياً لمجموع عوامل الضرب. وهذه في النهاية هي طريقة للتعبير عن قانون التوزيع: $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2.$

وإذا كنـا سنستخـدم هـذه القـاعـدة نموذجـاً لعملية الضرب فيجب علينـا أن نعـرف (Σb_k) (Σa_k) بحيث يضرب كل a_k (مرة واحدة بالضبط) بكـل واحد من b_k. وبـذلك فحـاصل الضرب يجب أن يكـون «متسلسلة» على الصـورة $\Sigma a_k b_j$ بحيث يظهـر كـل زوج مرتّب من الدليلين (k, j) مرة واحدة بالضبط.

ولتكـوين متسلسلة معرَّفـة تعريفـاً جيداً (well defined) من مجمـوعة هـذه الحـدود، من الضروري أن نتفق على الترتيب الذي يجب أن تظهر فيه هذه الحدود، وأي تجميـع ـ إذا لزم ـ يجب أن يستخدم. وعادة يستخـدم تجميع خـاص وترتيب معـين كما يـلي: يتم تجميع كـل الحـدود $a_k b_j$ التي يكون لـدليلها المجمـوع نفسه، وليكن مثلاً $k + j = t$، وبعـد ذلـك نرتّب هذه المجموعات وفقاً لقيم t التزايدية.

وبذلك فإن حاصل الضرب (Σb_k) (Σa_k) يجب أن يكون المتسلسلة:

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_2b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \dots . \qquad (1)$$

ومن المناسب عند العمل مع حواصل ضرب المتسلسلات، أن يكون الحد الأول على الصورة a_0 وليس a_1، أي أن:

$\Sigma a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ ، وتبعاً لهذا الاتفاق (1) بـ:

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_1) + \dots . \qquad (2)$$

وعلى هذه الصورة فإن حاصل الضرب يتبع القاعـدة نفسها التي تستخـدم في ضرب كثيرات الحدود:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) \\ = a_0b_0 + a_0b_1x + a_0b_2x^2 + a_0b_3x^3 + \dots + a_0b_nx^n \\ + a_1b_0x + a_1b_1x^2 + a_1b_2x^3 + \dots + a_1b_nx^{n+1} \\ + a_2b_0x^2 + a_2b_1x^3 + \dots + a_2b_nx^{n+2} \dots + \dots \\ = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots .\end{aligned} \qquad (3)$$

وفي السـطر الأخـير من (3) حيث نجمـع الحـدود ذات القـوة الـواحـدة في x، نـرى أن معامل x^t مساوٍ لمجموع الحدود $a_k b_j$ التي لها $k + j = t$. وبالطبع، لا تصح هذه القاعـدة

(تختل) عندما يكون t أكبر من m أو من n، ولكن ذلك لا يحدث لمتسلسلة لانهائية من مثل هذه الحدود، وهذا الرمز لضرب المتسلسلات قدمه كوشي. ونورد الآن التعريف الشكلي.

تعريف 9.4:

حاصل ضرب كوشي للمتسلسلتين Σb_k ، Σa_k هو المتسلسلة c_k التي يعطى فيها الحد رقم k بالصيغة:

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j \, b_{k-j}. \tag{4}$$

ومهما كان هذا التعريف طبيعياً أو مبرراً، فعلينا أن نثبت أن مجموع حاصل الضرب يساوي حاصل ضرب المجموعين. ويمكن اثبات أن

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) \tag{5}$$

طالما أن المتسلسلات الثلاث تقاربية.

وسنرى فيما بعد (مثال 9.14) أن c_k يمكن أن تتباعد حتى لو كانت Σa_k ، Σb_k تقاربيتين تقارباً شرطياً.

ولكن في البداية نثبت أن (5) تصح طالما كانت $\Sigma\, b_k$ ، $\Sigma\, a_k$ تقاربيتين تقارباً مطلقاً.

نظرية 9.14:

إذا كانت المتسلسلتان $\Sigma\, b_k$ ، $\Sigma\, a_k$ تقاربيتين تقارباً مطلقاً، فإن حاصل ضرب كوشي $\Sigma\, c_k$ يتقارب تقارباً مطلقاً ويكون:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big).$$

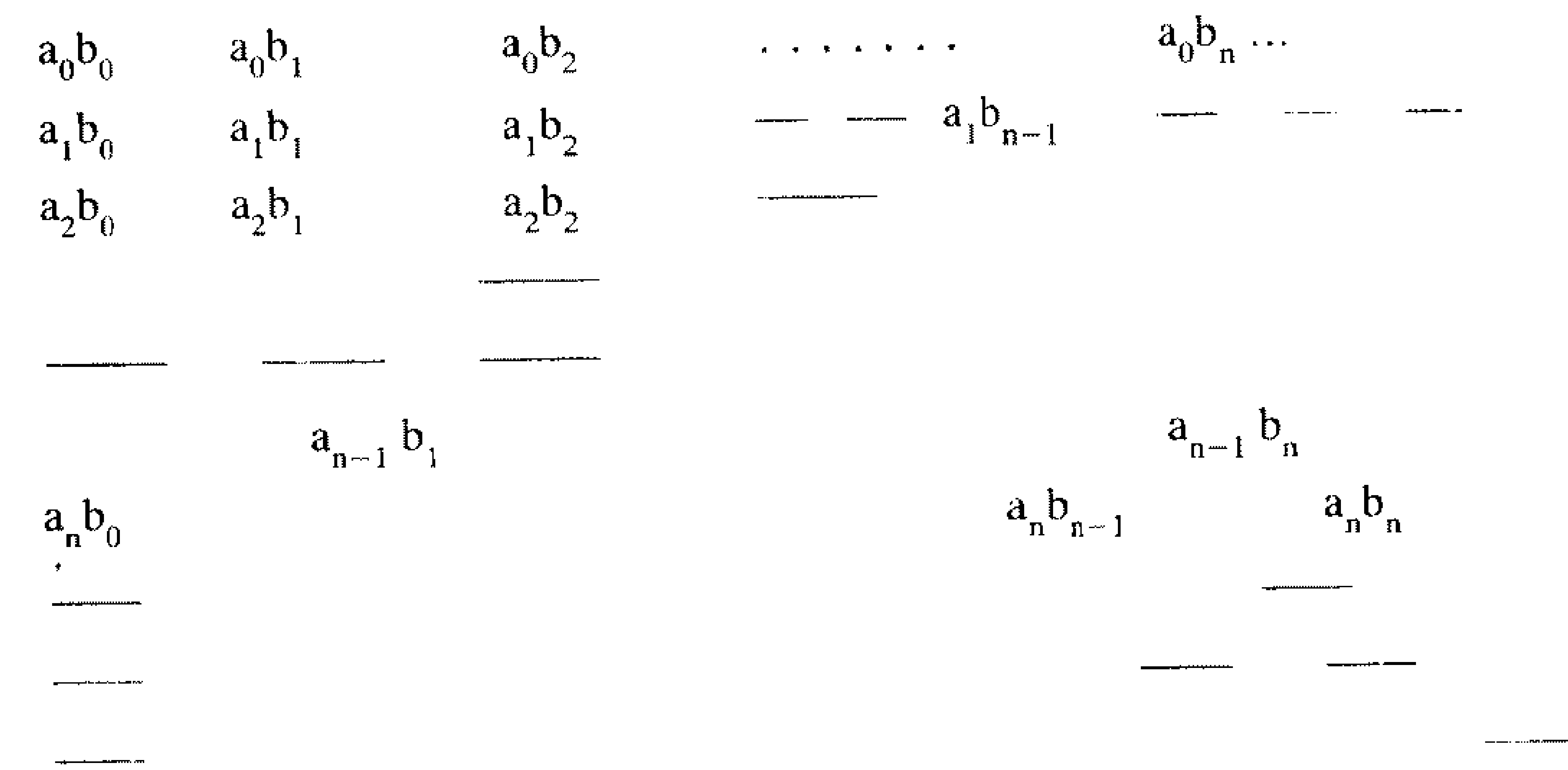
البرهان:

لكي نبرز المجاميع الجزئية المختلفة التي تدخل في هذا البرهان فإنه من المفيد اعتبار الحد $a_j b_k$ مصفوفة لانهائية ذات مداخل أو عناصر تحتوي على كل التوافيق الناتجة من ضرب الـ a_j في الـ b_k.

ومن دراسة الشكل 9.1 نـرى أن حاصـل ضرب كوشي $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j\, b_{n-j}$ هـو مجموع الحدود في القطر الـذي يبدأ من a_0b_n الـواقع في الصف العلوي والعمـود الأيسر، وبالتـالي فالمجموع الجزئي $\sum_{k=0}^{n} c_k$ يتكون من مجموع كل الحدود في المثلث العلوي الأيسر، وهو فئة جزئية من التشكيلة (array). وأيضاً ينتج المجموع الجزئي $\sum_{k=0}^{n} a_k$ بتجميع الحدود n+1 الأولى في أي عمـود وأخذ العـامل المشـترك b_k واختصاره. وإذا تم إجـراء ذلـك لـلأعمـدة n + 1 الأولى نحصل على كـل الحدود في المربع الأيسر العلوي للتشكيـل. وإجمالي هـذه الحدود الـ $(n + 1)^2$ هو:

$$b_0\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + b_1\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + \ldots + b_n\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right). \qquad (6)$$



شكل (9.1)

ومن هذه الملاحظات يتضح أنه لكل n يكون:

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|\right) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right).$$

وبالتالي فإن c_k مطلقة التقارب.

ولكي نبيّن أن (5) تتحقق، نتناول الحالة الخاصة التي يكون فيها Σb_k ، Σa_k متسلسلتين غير سالبتين. وعندئذ فإن البرهان السابق يوضح لنا أنه لكل n يكون:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right), \tag{7}$$

مما يؤدي إلى:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right). \tag{8}$$

والآن ندرس حاصل الضرب $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$.

من (6) نعلم أنه يساوي مجموع الحدود الـ $(n+1)^2$ في المربع العلوي الأيسر من شكل 9.1. وهذا المربع موجود داخل مثلث ما علوي أيسر مجموعه $\sum_{k=0}^{m} c_k$.

وهذا لـ m كبير بدرجة كافية ($m \geqslant 2n+2$ ، بالتحديد) نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \geqslant \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right). \tag{9}$$

وحيث إنّ (9) تصح لكل n، نستنتج أن:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \geqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right). \tag{10}$$

ومن (8) و (10) نستنتج أن (5) تتحقق.

ولإكمال البرهان، ندرس الحالة العامة التي يكون فيها لـ Σb_k ، Σa_k حدود ذات إشارات اختيارية.

لقد أثبتنا أعلاه أن حدود التشكيل في شكل 9.1 تُكوِّن متسلسلة مطلقة التقارب، ولذا وفقاً للنظرية 9.13 يكون مجموعها هو نفسه عند أية اعادة لترتيب حدودها. وبالتالي فإن

المجموع هو نفسه إذا ما رتبت وجمعت الحدود في مثلثات للحصول على $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ أو إذا رتبت وجمعت الحدود في مربعات للحصول على $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$. ومن ثم تتحقق المعادلة (5) ونكون بذلك قد أتممنا البرهان.

وقبل ورود النظرية 9.14 ذكرنا أن تقارب Σa_k ، Σb_k ليس كافياً لضمان تقارب حاصل ضرب كوشي لهما، وسنستعرض ذلك في المثال التالي:

مثال 9.14:

إذا كانت كل من Σb_k ، Σa_k هي المتسلسلة متعاقبة الاشارة $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}}$ فإن حاصل ضرب كوشي للمتسلسلتين Σb_k ، Σa_k غير تقاربي. نبين أن $\{c_k\}$ لا يمكن أن يكون لها النهاية 0 وذلك باختبار المتتالية الجزئية $\{c_{2k}\}$:

$$c_{2k} = \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{j+1}}{\sqrt{j+1}} \cdot \frac{(-1)^{2k-j-1}}{\sqrt{2k-j-1}}$$

$$= (-1)^{2k} \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{\sqrt{j+1}\,\sqrt{2k-j-1}} . \tag{11}$$

ونقول هنا أن كلاً من الحدود $2k+1$ في المجموع الموجود في الطرف الأيمن يكون مساوياً أو أكبر من $\frac{1}{2k}$ ؛ لأن:

$$\left[2k-(j+1)\right]^2 \geqslant 0;$$

وبالتالي:

$$4k^2 - 4k(j+1) + (j+1)^2 \geqslant 0,$$

أو

$$4k^2 \geqslant (j+1)\left[4k-(j+1)\right] \geqslant (j+1)\,[2k-j-1],$$

مما يؤدي إلى:

$$\frac{1}{\sqrt{j+1}\,\sqrt{2k-j-1}} \geqslant \frac{1}{2k} .$$

والمجموع في الطرف الأيمن لـ (11) يساوي على الأقل عدد الحدود مضروباً في أصغرِ حدٍ، ومن ثم فإن:

$$c_{2k} \geqslant (2k+1)\left(\frac{1}{2k}\right) > 1. \tag{12}$$

وحيث إن (12) تتحقق لكل k من $\mathbb{N}$، فإن c_k لا تؤول إلى الصفر، وبالتالي وفقاً للمفترض 9.1 تكون c_k غير تقاربية.

لا تعطي النظرية 9.14 والمثال 9.14 الكلمة الأخيرة حول تقارب حاصل ضرب كوشي.

وتوجد نظرية (برهنها ميرتنس Mertens) ـ لا نبرهنها هنا ـ تنص على أن حاصل ضرب كوشي للمتسلسلتين Σa_k ، Σb_k يكون تقاربياً طالما كانت احدى المتسلسلتين Σa_k أو Σb_k مطلقة التقارب والأخرى تقاربية وكما ذكرنا أعلاه تتحقق المعادلة (5) حينما تكون كل المتسلسلات الثلاث تقاربية.

تمارين 9.8

1 ـ أثبت: إذا كانت Σa_k تقاربية و Σb_k مطلقة التقارب فإن $\Sigma a_k b_k$ مطلقة التقارب.

2 ـ ناقش تبادلية حاصل ضرب كوشي:

$$\left(\Sigma a_k\right)\left(\Sigma b_k\right) \overset{?}{=} \left(\Sigma b_k\right)\left(\Sigma a_k\right)$$

3 ـ أثبت: إذا كانت Σa_k تقاربية تقارباً شرطياً فإنه توجد اعادة ترتيب للمتسلسلة Σa_k تتباعد (إلى ∞).

4 ـ أثبت: إذا كانت Σa_k تقاربية شرطياً فإنه يوجد إعادة ترتيب للمتسلسلة Σa_k تتذبذب مجاميعها الجزئية بين عددين محدَّدين مسبقاً L_1, L_2.

5 ـ أثبت أن المتسلسلة:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \ldots$$

تقاربية وأن مجموعها هو $\frac{1}{2}$.

6 ـ أثبت: إذا كانت:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2,$$

فإن:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = \log 2.$$

8 ـ أثبت: إذا كانت

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

أ ـ

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots,$$

ب ـ

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots,$$

ج ـ

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots,$$

الفصل العاشر

10

تكامل ريمان - استيلتيس

The Riemann - Stieltjes Integral

10.1 الدوال ذات التغير المحدود

Functions of Bounded Variation

قبل البدء بنقاش المواضيع ذات الاهتمام الأول في هذا الفصل، نأمل أن نعرِّف فكرةً هي امتداد لفكرة أصغر حد أعلى. عندما نكتب $\text{lub}(S) = b$ نعني بشكل ضمني أن الفئة S محدودة من أعلى. ومن الملائم في أغلب الأحيان أن نعطي جملة مشابهة في حالات عدم التأكد من أن S محدودة من أعلى، لهذا الهدف نعرف العنصر الأعلى (Supremum) لفئة غير خالية S في $\mathbb{R}$:

$$\sup S = \begin{cases} \text{lub}(S), & \text{إذا كانت } S \text{ محدودة من أعلى} \\ \infty, & \text{إذا كانت } S \text{ غير محدودة من أعلى} \end{cases}$$

إذن فإن الجملة «$\sup S = \infty$» تعني ببساطة أن S غير محدودة من أعلى، والجملة «$\sup S = b$» تعني أن S لها أصغر حد أعلى وهو b. بالطريقة نفسها نعرف العنصر الأدنى (Infimum) لفئة غير خالية S:

$$\inf S = \begin{cases} \text{glb}(S), & \text{إذا كانت } S \text{ محدودة من أسفل} \\ -\infty, & \text{إذا كانت } S \text{ غير محدودة من أسفل} \end{cases}$$

نتذكر من الفصل السابع أن التجزيء $\mathcal{P}$ للفترة $[a, b]$ هو متتالية عددية متزايدة ومنتهية

$\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث يكون $x_0 = a$ ، $x_n = b$. لنفرض أن f دالة على الفترة $[a, b]$ وندرس المجموع:

$$\mathscr{P}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| \qquad (1)$$

نود الاخذ بعين الاعتبار فئة القيم $\mathscr{P}(f)$ عندما $\mathscr{P}$ تمثل كل التجزئيات على الفترة $[a, b]$. قد تكون فئة هذه القيم محدودة من أعلى، وقد لا تكون محدودة من أعلى، ونكتب العنصر الأعلى لفئة هذه القيم على شكل $\sup \mathscr{P}(f)$ للدلالة على أن العنصر الأعلى قد أخذ على كل التجزيئات $\mathscr{P}$ على الفترة $[a, b]$.

تعريف 10.1 :

يُقال أنّ الدالة f ذات تغير (تغاير) محدود على $[a, b]$ بشرط أن يكون $\sup_{\mathscr{P}} \mathscr{P}(f)$ عدداً نهائياً. في هذه الحالة نكتب:

$$V_a^b f = \sup_{\mathscr{P}} \mathscr{P}(f).$$

العدد $V_a^b f$ يسمي التغير (الكلي) للدالة f (total variation) على $[a, b]$.

مثال 10.1:

أي دالة مطَّردة تكون ذات تغير محدود؛ لأنه إذا كان $\mathscr{P}$ أي تجزيء فإن $\mathscr{P}(f) = \left|f(b) - f(a)\right|$.

مثال 10.2:

تكون الدوال السلَّمية التالية ذات تغير محدود على $[0, 2]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \leq 1, \\ 1, & \text{if} \quad x > 1, \end{cases} \qquad ، \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \neq 1, \\ 1, & \text{if} \quad x = 1; \end{cases}$$

لأن $V_0^2 f = 1$ و $V_0^2 g = 2$.

إن أول نظرية حول هذا الموضوع هي النظرية التي تعطي شرطاً كافياً لضمان أن الدالة ذات تغير محدود.

نظرية 10.1 :

إذا كانت f ذات مشتقة محدودة على [a, b] ، فإن f ذات تغيُّر محدود على [a, b].

البرهان :

تكون f قابلة للتفاضل لأي تجزيء $\mathscr{P}$ على الفترة الجزئية التي ترتيبها k أي $[x_{k-1}, x_k]$ ، إذن باستخدام قانون القيمة الوسطى ، يوجد عدد μ_k في هذه الفترة الجزئية حيث يكون :

$$f'(\mu_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

مستخدمين ذلك للتعويض في (1) نجد أن :

$$\mathscr{P}(f) = \sum_{k=1}^{n} |f'(\mu_k)| (x_k - x_{k-1}) \leqslant \left\{\sup_{[a,b]} |f'(x_k)|\right\} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

$$= \left\{\sup_{[a,b]} |f'(x)|\right\} (b - a).$$

بما أن المتباينة السابقة صحيحة لكل تجزيء $\mathscr{P}$، فإن العدد في الجانب الأيمن أكبر أو يساوي V_a^b . لهذا السبب فإن التغير محدود.

من الواضح أن الشرط في النظرية 10.1 ليس ضرورياً للتغير المحدود. فالدوال في المثال 10.2 دوال غير قابلة للتفاضل على [0, 2] ، وإذن ليس لها مُشتقّات محدودة. ولكن حتى إذا افترضنا أن f قابلة للتفاضل ولها تغير محدود فإن ذلك لا يؤدي إلى أن f′ محدودة (انظر المثال 10.5).

نقارن مفهوم التغيُّر المحدود بالخواص المدروسة سابقاً للدالة، مثل أن تكون الدالة محدودة، ومتصلة، وقابلة للتفاضل.

مفترض 10.1 :

إذا كانت f ذات تغير محدود على [a, b] ، فإن f محدودة هناك.

البرهان :

إذا كان x في [a, b] فإننا نفترض أن $\mathscr{P}$ تجزيء بسيط يتكوَّن من {a ، x ، b}.

عندئذ:
$$\mathcal{P}(f) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant V_a^b$$

وهكذا:
$$|f(x)| - |f(a)| \leqslant V_a^b,$$

ومن ذلك
$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + V_a^b.$$

لهذا السبب إذا كان V_a^b نهائياً فإن f محدودة.

نوضح فيما يلي إن الاتصال لا يؤدي إلى التغيُّر المحدود.

مثـــال 10.3:

إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{\pi}{2x}\right), & \text{if} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{if} \quad x = 0, \end{cases}$$

فإن $V_0^1 = \infty$. إنّ برهان ذلك يجري بتبيان أن لأي عدد B يوجد تجزيء $\mathcal{P}$ بحيث يكون $\mathcal{P}(f) > B$. للحصول على مثل هذا التجزيء $\mathcal{P}$ نختار:

$$x_n = 1, x_{n-1} = \frac{1}{3}, x_{n-2} = \frac{1}{5}, \ldots, x_{n-k} = \frac{1}{2k+1}, \ldots; \tag{2}$$

وهذا يعطى عندما يكون $k > 0$.

$$|f(x_{n-k}) - f(x_{n-k+1})| = \left| \frac{1}{(2k+1)} - \frac{-1}{(2k-1)} \right| > \frac{2}{(2k+1)}.$$

بما أننا نعلم أن المتسلسلة $\sum_k \frac{2}{(2k+1)}$ تباعدية، ينتج من ذلك، وباختيار n كبير للغاية، انه توجد حدود كافية في $\mathcal{P}(f)$ بحيث إن المجموع الجزئي (Partial Sum) المقابل لذلك يزيد عن B.

إن المثال 10.3 يقودنا إلى الحدس الذي يقول بأن الدالة التي تتذبذب بدون توقف لا

يكون لها تغير محدود. ولكن هذه الحالة غير صحيحة كما سيوضح مثال مشابه للمثال السابق.

مثال 10.4:

إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{if} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{if} \quad x = 0, \end{cases}$$

فإن f لها تغير محدود على الفترة $[0, 1]$. ممكن إثبات ذلك باستخدام النظرية 10.1. الحسابات التالية توضح أن f' محدودة على $[0, 1]$.

$$|f'(x)| = \left|2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 2 + 1,$$

لكل $0 < x \leqslant 1$

و $f'(0) = 0.$

المثال التالي يوضح أن قابلية الدالة للتفاضل لا تتضمّن خاصية التغيُّر المحدود.

مثال 10.5:

إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2, & \text{if} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{if} \quad x = 0, \end{cases}$$

فإن f ليست ذات تغير محدود على $[0, 1]$ على الرغم من أن f قابلة للتفاضل هناك (انظر التمرين 10.1.6). النقطة الوحيدة التي تكون فيها قابلية f للتفاضل غامضة هي $x = 0$، وهناك لدينا:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 = 0.$$

التساوي الأخير يُصَح ؛ لأن $|x| \leqslant \left|x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2\right|$.

تمارين 10.1

في التمارين من 1 إلى 6 أوجد التغير الكلي V_a^b للدالة المعطاة على الفترة المذكورة.

1 ـ $f(x) = x \sin x$ على $[0, 3\pi]$.

2 ـ $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ على $[-1, 2]$.

3 ـ
$$f(x) = \begin{cases} \tan x, & \text{if } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{if } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

4 ـ
$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \end{cases}$$
على $[0, 1]$.

5 ـ إذا كانت $\{a_k\}$ متتالية عددية غير منتهية وكانت:
$$f(x) = \begin{cases} a_k, & \text{if } x = \frac{1}{(k+1)}, \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$
على $[0, 1]$.

6 ـ
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2, & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \end{cases}$$
على $[0,1]$

إرشاد: خذ $x_{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ وناقش بالطريقة نفسها في مثال 10.3).

7 ـ بين أن أي دالة سلميّة (Step function) هي ذات تغيُّر محدود على $[a, b]$.

8 ـ برهن أنه إذا كانت كل من f، g ذات تغير محدود على $[a, b]$، فإن $f \pm g$ ذات تغير محدود على $[a, b]$.

9 ـ إذا كانت f ذات تغيُّر محدود على $[a, b]$ و $f(x) = g(x)$ لكل x حيث $x \neq c$ وعندما تكون $c \in [a, b]$ برهن أن g ذات تغير محدود على $[a, b]$.

لنفرض أن f ذات تغير محدود على $[a, b]$ ، $a \leqslant x \leqslant b$. من السهل أن نوضح أن f ذات تغير محدود على الفترة الجزئية $[a, x]$ ؛ لأن أي تجزيء $\mathscr{P}$ من الفترة الجزئية $[a,x]$ يمكن تمديده إلى تجزيء $\mathscr{P}^*$ على $[a, b]$ ، وذلك بإضافة النقطة $x_{n+1} = b$. من الواضح أن :

$$\mathscr{P}(f) \leqslant \mathscr{P}^*(f) \leqslant V_a^b.$$

من ذلك يمكن تعريف دالة التغير الكلي v_f كالآتي :

(1) $v_f(x) = V_a^x f$ عندما يكون $a \leqslant x \leqslant b$.

نظرية مساعدة 10.1 :

إذا كانت f ذات تغير محدود على $[a, b]$ ، فإن v_f دالة غير تناقصية هناك .

البرهان :

البرهان هنا مماثل للبرهان في الفقرة السابقة ما عدا ابدال b بالمتغير y . إذا كان $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$ فإن أي تجزيء $\mathscr{P}$ على $[a, x]$ يقابله تجزيء $\mathscr{P}^*$ على $[a, y]$ يحقق :

$$\mathscr{P}(f) \leqslant \mathscr{P}^*(f).$$

إذن فإن العنصر الأعلى لكل هذه الـ $\mathscr{P}(f)$ لا يمكن أن يتعدى العنصر الأعلى للتجزيئات $\mathscr{P}^*(f)$ ، ومن ذلك فإن $V_a^x f \leqslant V_a^y f$. لهذا السبب فإن $v_f(x) \leqslant v_f(y)$ والذي يُبيِّن أن v_f دالة غير تناقصية على الفترة $[a, b]$.

نظرية مساعدة 10.2 :

إذا كانت f ذات تغير محدود على $[a, b]$ ، فإن $v_f - f$ دالة غير تناقصية هناك .

البرهان :

إذا كانت $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$ فإننا نستطيع توضيح أن :

$$V_a^y f - f(y) - \left\{V_a^x f - f(x)\right\} \geqslant V_a^y f - \left\{f(y) - f(x)\right\}. \qquad (2)$$

وهذا يكفي لإثبات التأكيد المطلوب؛ لأنه من الواضح أن الطرف الأيمن غير سالب (الحد المطروح $|f(y) - f(x)|$ هو بالضبط $\mathscr{P}(f)$ عندما يكون $\mathscr{P}$ التجزيء التافه (trivial) $(\{x, y\}$. إذن فالمسألة الآن هي برهنة أن:

$$V_a^y f - V_a^x f \geqslant V_x^y f$$

أو

$$V_a^y f \geqslant V_a^x f + V_x^y t. \tag{3}$$

نتحقق من المتباينة (3) كالآتي:

إذا كان $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ تجزيئين للفترتين $[a, x]$ ، $[x, y]$ على التوالي، فإن $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ هو تجزيء للفترة $[a, y]$ ، و

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_1(f) + \mathscr{P}_2(f) &= \sum_{x_k \leqslant x} |f(x_k) - f(x_{k-1}| + \sum_{x_k > x} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= \sum_{x_k \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2} |f(x_k) - f(x_{k-1}| \\ &= (\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2)(f).\end{aligned}$$

إذن من غير المحتمل أن يكون $\sup \mathscr{P}_1(f) + \sup \mathscr{P}_2(f)$ أكبر من $\sup(\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2)$.

لهذا السبب فإن $V_a^x f + V_a^y f \leqslant V_a^y f$ ونستنتج أن:

$$v_f(x) - f(x) \leqslant v_f(y) - f(y),$$

وبذلك يتم البرهان.

نظرية 10.2:

الدالة f ذات تغير محدود عندما وفقط عندما يكون هناك دالتين غير تناقصيتين g ، h بحيث يكون $f = g - h$.

البرهان:

لنفرض أن $f = g - h$ حيث تكون g و h دالتين مطردتين، حيث إن كلاً من g و h ذات تغير محدود فإن دالة الفرق بينهما هي أيضاً ذات تغير محدود (انظر تمرين 10.2.5).

العكس: إذا كانت f ذات تغير محدود فإن النظرية المساعدة 10.1 والنظرية المساعدة 10.2 تُبينان أن v_f و $v_f - f$ دالتين غير تناقصيتين، ومن الواضح أن $f = v_f - (v_f - f)$.

تماريـــن 10.2

1 ـ برهن أنه إذا كانت f دالة مطّردة على $[a, b]$، فإن

$v_f(x) = |f(x) - f(a)|$ لكل x في $[a, b]$.

2 ـ إذا أعطيت الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{if} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ x \ , & \text{if} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 - x, & \text{if} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

أوجد $v_f(x)$ لكل x في $[-1, 2]$

3 ـ إذا أُعطيت الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & \text{if} \quad x = 0, \\ 1 \ , & \text{if} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ x - 1, & \text{if} \quad 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

أوجد $v_f(x)$ لـ $[0,2]$.

4 ـ إذا أعطيت الدالة $f(x) = \sin x$ على $[0, 2\pi]$، أوجد $v_f(x)$ في $[0, 2\pi]$.

5 ـ برهن أنه إذا كانت كلٌّ من f و g دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$، فإن gh أيضاً دالة ذات تغير محددة على $[a, b]$.

6 ـ برهن أنه إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$، فإن f تكون قابلة للتكامل الريماني هناك.
(ارشاد: انظر النظرية 7.8).

7 ـ برهن عكس المتباينة (3)، أي أنه إذا كان $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$ ، و f دالة ذات تغير محدود على [a, b] ، فإن $V_a^y \leqslant V_a^y + V_x^y$ ؛ وبذلك يكون $V_a^y f = V_a^x f + V_x^y f$.

8 ـ برهن أنه إذا كانت f ذات تغير محدود على [a, b] و f متصلة عند العدد t في [a, b] ، فإن v_f أيضاً متصلة عند t.

10.3 تكاملات ومجاميع ريمان ـ إستيلتيس

Riemann - Stieltjes Sums and integrals

لنفرض أن f، g دالتان معرّفتان على الفترة [a, b] . وأن $\mathscr{P}\left\{n_k\right\}_{k=1}^{n}$ تجزيء للفترة [a, b] وأن $\left\{\mu_k\right\}_{k=1}^{n}$ متتالية (منتهية) بحيث يكون كل μ_k موجودة في الفترة الجزئية التي ترتيبها k والتي تحدد بواسطة $\mathscr{P}$؛ أي أن $x_{k-1} \leqslant \mu_k \leqslant x_k$. عندئذٍ:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)\left\{g(x_k) - g(x_{k-1})\right\}$$

يسمى بمجموع إستيلتيس للدالة f بالنسبة للدالة g.

تعريف 10.2:

تكون الدالة f قابلة لتكامل ريمان ـ إستيلتيس بالنسبة للدالة g على الفترة [a, b] بشرط وجود عدد J حيث إذا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد موجب δ حيث يكون:

$$\|\mathscr{P}\| < \delta \quad \text{يؤدي إلى} \quad \left|J - \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)\left\{g(x_k) - (g_{k-1})\right\}\right| < \varepsilon$$

بغض النظر عن اختيار μ_k في $[x_{k-1} ، x_k]$.

في هذه الحالة يسمى العدد J بتكامل ريمان إستيليس(*) للدالة f بالنسبة للدالة g، و J يرمز له بالرمز $\int_a^b f\,dg$. وتسمى f بالدالة المُكامَلة (integrand) و g بالدالة المُكامِل بها (integrator).

(*) ريمان (جورج فريدريك برنهارد) (1826-1866) عالم رياضيات ألماني بارز في مجال التحليل والهندسة. إستيلتيس (توماس يوحنا) (1856-1894) عالم رياضيات هولندي. (ملاحظة المترجم).

ملاحظة: الحالة التي تكون فيها الدالة g هي الدالة المحايدة (أي أن $g(x) = x$) فإن مجموع إستيلتيس يكون بالضبط مجموع ريمان للدالة f، وبذلك تكون نتيجة النهاية التكامل الريماني $\int_a^b f$.

هكذا نكون قد تناولنا مفهوماً يشتمل على التكامل الريماني كحالة خاصة.

مثال 10.6:

لنفرض أن f دالة متصلة على $[a, b]$ وأن g معطاة كالآتي:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad a \leqslant x \leqslant t, \\ p, & \text{if} \quad t \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

لأي تجزيء $\mathscr{P}$، تكون نقطة الانفصال t إما في فترة جزئية واحدة أو في فترتين جزئيتين: إما $x_{m-1} < t < x_m$ أو $t = x_m$ والذي يعطي $[x_{m-1} ، t]$ و $[t ، x_{m+1}]$ كفترتين جزئيتين مقابلين لـ $\mathscr{P}$. كل الحدود في مجموع استيلتيس والتي لا تحتوي هذه الفترات الجزئية تعتبر صفراً، وهكذا في الحالة الأولى يُخْتَصر المجموع إلى $f(\mu_m)\,P$ وفي الحالة الثانية يكون المجموع:

$$f(\mu_m).\,0 + f(\mu_{m+1})\,p = f\,(\mu_{m+1})\,P. \qquad (1)$$

كلما كان $\|\mathscr{P}\| \to 0$ فإن كلاً من $\mu_m ، \mu_{m+1}$ يقترب من t، إذن فاتصال (استمرارية) f تؤدي إلى أن نهاية مجموعة استيلتيس موجودة وتساوي $f(t)\,p$. لهذا السبب فإن:

$$\int_a^b f\,dg = f(t)\,p$$

ليس من الصعب أن نرى إمكانية أن يشمل المثال السابق الحالة التي تكون فيها g دالة سلمية بعدد نهائي من القفزات عند نقاط مختلفة كما لـ t أعلاه.

تربط النظرية التالية بين تكامل ريمان ـ استلتيس وتكامل ريمان والمفترح باستعمال رموز التفاضل dg:

نظرية 10.3 :

إذا كانت f، g دالتين حيث f قابلة للتكامل الريماني، g' متصلة على $[a, b]$ ، فإن f قابلة لتكامل ريمان ـ استيلتيس بالنسبة للدالة g و

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b fg',$$

حيث يدل الطرف الأيمن على التكامل الريماني لحاصل الضرب.

البرهان :

لأي تجزيء $\mathscr{P}$، g قابلة للتفاضل على أي فترة جزئية؛ ولهذا فإنه باستخدام قانـون القيمة الوسطى يوجد عدد c_k في $[x_{k-1} ، x_k]$ يحقق

$$g'(c_k)(x_k - x_{k-1}) = g(x_k) - g(x_{k-1}).$$

وهو ما يعطي :

$$\sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)\left\{g(x_k) - \mathrm{f}(x_{k-1})\right\} = \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)\, g'(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)\, g'(\mu_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad (2)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)\left\{g'(c_k) - g'(\mu_k)\right\}(x_k - x_{k-1}).$$

يكوّن المجموع الأول في الطرف الأيمن (2) المجموع الريماني لحاصل الضرب fg' ، والذي لا بد أن يكون قابلاً للتكامل الريماني؛ لأن كلاً من f، g' قابلة للتكـامل الـريماني. إذن عنـدما يؤول $\|\mathscr{P}\|$ إلى الصفر يقترب هذا المجموع من التكـامل الـريماني $\int_a^b fg'$. إذن نسـتطيع تكملة برهاننا بتوضيح أن المجموع الثاني في (2) يقترب من النهاية صفـر عنـدمـا $\|\mathscr{P}\|$ يؤول إلى الصفر. لتحقيق هذا الهدف نشير إلى الاتصال المنتظم للدالـة g' (نظريـة 5.5). إذا كان $\varepsilon > 0$ فإننا نختار $\delta > 0$ بحيث $|\mu - c| < \delta$ يؤدي إلى :

$$\left|g'(c) - g'(\mu)\right| < \frac{\varepsilon}{(b-a)\,\mathrm{lub}\left\{|f(x)|\right\}}$$

من الممكن أن نفترض أن $\text{lub}\left\{\left|f(x)\right|\right\} \neq 0$ ؛ لأنه في الحالة التي تكون فيها f مطابقة للصفر فإن التأكيد يكون تافهاً. الآن $\|\mathscr{P}\| < \delta$ يؤدي إلى أن لكل k يكون $\left|c_k - \mu_k\right| < \delta$ وبهذا يكون المجموع الثاني في (2) أصغر من أو مساوياً لِـ:

$$\sum_{k=1}^{n} \left|f(\mu_k)\right| \left|g'(c_k) - g'(\mu_k)\right| (x_k - x_{k-1})$$

$$< \max\left\{\left|f(\mu_k)\right|\right\} \quad \frac{\varepsilon}{(b-a)\,\text{lub}\left\{\left|f(x)\right|\right\}} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k1})$$

$$\leqslant \left[\frac{\varepsilon}{(b-a)}\right] \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

لهذا السبب فإنه عندما يؤول $\|\mathscr{P}\|$ إلى الصفر يقترب مجموع استيلتيس إلى النهاية $\int_a^b fg'$.

يشار في النظرية التالية إلى الفترة الأساسية $[a, b]$ ضمنياً، ولكن ستظل هي نفسها لاحقاً. إن براهين الأجزاء المتعددة من النظرية تعتمد على مناقشة مباشرة مبنية على مجموع استيلتيس.

نظرية 10.4:

إذا كانت كل من f_1، f_2 قابلة لتكامل ريمان - استيلتيس بالنسبة إلى كل من g_1، g_2 وكان p عدداً حقيقياً فإن كلاً من التكاملات في الطرف الأيسر للمعادلات التالية موجودة وقيمتها معطاة بِـ:

أ - $\int (f_1 + f_2)\, dg_1 = \int f_1\, dg_1 + \int f_2\, dg_1,$

ب - $\int f_1 d\,(g_1 + g_2) = \int f_1\, dg_1 + \int f_1\, dg_2,$

ج - $\int (pf_1)\, dg_1 = p \int f_1\, dg_1,$

د - $\int f_1\, d\,(pg_1) = p \int f_1\, dg_1.$

البرهان:

هذا البرهان ترك كتمرينات 10.3.10-10.3.7.

تعودنا في العمل مع التكامل الريماني اعتبار أن الدالة السُلَّمية دالـة سهلة التكامـل، وعلى الرغم من أن الدالة السُلَّمية تعطينا مثالاً سهلاً لتكـامل ريمـان ـ استيلتيس ولكن الحذر يجب أن يؤخذ، لأن بعض الدوال السهلة غير قابلة للتكامل.

مثـــال 10.7:

إذا كانت:

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{if} \quad 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

فإن f غير قابلة لتكامل ريمان ـ استيلتيس بالنسبة للدالة g على [0, 2] ؛ وذلـك لأنه إذا كـان $\mathscr{P}$ تجزيئاً للفترة [0, 2] يحتوي على 1 وله معيـار (norm) صغير، لنفـرض أن $x_{m-1} = L$ ، فإن $g(x_m) - g(x_{m-1}) = 1$ ونستطيع أن نختار إما $\mu_m = 1$ ، وإما $\mu_m > 1$. إذا كان $\mu_m = 1$ فسنحصل على:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\mu_n) \left\{g(x_k) - g(x_{k-1})\right\} = f(\mu_m \}g(x_m - g(x_{m-1})\} = 0,$$

وإذا كان $\mu_m > 1$ فسنحصل على:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\mu_k) \left\{g(x_k) - g(x_{k-1})\right\} = 1.1 = 1.$$

بما أن $\|\mathscr{P}\|$ يمكن أن يكون صغيراً جداً، فهذا يُبيِّن أن مجموع استيلتيس لا يقترب من نهايـة ما كلما اقترب $\|\mathscr{P}\|$ نحو الصفر.

يوضح هذا المثال نتيجة عامة وهي: إذا كانت للدالـة المُكَامِلة وللدالـة المُكَامَـلْ بها نقـطة انفصال مشتركة فإن التكامل غير موجود. وهذا مضمون النظرية التالية.

نظرية 10.5:

إذا كانت كل من f، g منفصلة عند النقطة c في نطاقهما [a, b] ، فإن f غير قابلة لتكامل ريمان ـ استيلتيس بالنسبة للدالة g على [a, b].

البرهان:

ندرس حالتين. الأولى: نفرض أن $\lim_c g(x)$ غير موجود. ومعنى ذلك أنه توجد $\varepsilon_g > 0$ بحيث أنه لأي $\delta > 0$ نستطيع أن نختار عددين هما x_{m-1} ، x_m في $[a, b]$ يحققان:

$$x_{m-1} < c < x_m \text{ ، } x_m - x_{m-1} < \delta \quad \text{و} \quad |g(x_m - g(x_{m-1})| \geqslant \varepsilon_g.$$

الآن لنفرض أن $\mathscr{P}$ تجزيء للفترة $[a, b]$ و $\|\mathscr{P}\| < \delta$ حيث الفترة الجزئية التي ترتيبها m تكون $[x_{m-1} \text{ ، } x_m]$.

إنّ انفصال الدالة f عند c يؤدي إلى وجود $\varepsilon_f > 0$ و μ'_m ، μ''_m في $[x_{m-1} \text{ ، } x_m]$ حيث يكون:

$$|f(\mu'_m) - f(\mu''_m)| \geqslant \varepsilon_f.$$

إذا اخترنا $\mu'_k = \mu''_k$ لأي $k \neq m$ فإن مجموعي استيلتيس يختلفان فيما بينهما على الأقل بالمقدار $\varepsilon_f\, \varepsilon_g$. بما أن $\|\mathscr{P}\|$ صغيراً جداً، هذا يُبيِّن أن مجموعي استيلتيس لا يقتربان إلى نهاية ما كلما اقترب $\|\mathscr{P}\|$ إلى الصفر.

الآن ندرس الحالة التي يكون فيها $\lim_c g(x)$ موجوداً ولكن غير مساوٍ $g(c)$ ، لنقل إنَّ:

$$|g(c) - \lim_c g(x)| = \varepsilon_g > 0.$$

لأي $\delta > 0$ معطاة نختار تجزيء $\mathscr{P}$ للفترة $[a, b]$ حيث $\|\mathscr{P}\| < \delta$ و $x_m = c$ و:

$$|g(c) - g(x_{m-1})| \geqslant \frac{\varepsilon_g}{2} \quad \text{أو} \quad |g(x_{m+1}) - g(c)| \geqslant \frac{\varepsilon_g}{2}$$

يؤدي انفصال f إلى وجود $\varepsilon_f > 0$ حيث $[x_{m-1} \text{ ، } x_m]$ أو $[x_m \text{ ، } x_{m+1}]$ يحتوي على نقطتين μ' ، μ'' بحيث يكون $f(\mu') - f(\mu'') \geqslant \varepsilon_f$. وهذا كما سبق يعطينا اثنين من مجاميع استيلتيس للتجزيء $\mathscr{P}$ ويختلفان على الأقل بالمقدار $\varepsilon_f\, \varepsilon_g/2$ ، وبذلك فإن هذين المجموعين لا يقتربان من نهاية ما عندما يؤول $\|\mathscr{P}\|$ إلى الصفر.

هذا العمل يعتمد على التعريف القائل بأن التجزيء يتطلب افتراضاً ضمنيّاً وهو أن

$a \leqslant b$. لكي ندرس التكامل مثل $\int_a^b f\,dg$ عندما يكون $a < b$ نتبنى الفكرة المألوفة والمستعملة في التكامل الريماني والتي تقول إن :

$$\int_b^a f\,dg = -\int_a^b f\,dg. \tag{3}$$

في الفقرة التالية نبرهن نظرية حول تكامل ريمان ـ استيلتيس، وهي نظير النظرية 7.3.

نظرية 10.6 :

إذا كانت f قابلة لتكامل ريمان ـ استيلتيس بالنسبة للدالة g على الفترات [a, b] و [b,c] و [a, c] ، فإن :

$$\int_a^c f\,dg = \int_a^b f\,dg + \int_b^c f\,dg. \tag{4}$$

البرهان :

باستخدام الصيغة (3) يكفي أن نبرهن أن (4) صحيحة بالفرض $a < b < c$ (انظر التمرين 10.3.12). إذا أعطيت $\varepsilon > 0$ ، نختار $\delta > 0$ حيث إنه إذا كان $\mathscr{P}$ تجزيئاً لإحدى الفترات [a,b] ، [b, c] أو [a, c] ويحقق $\|\mathscr{P}\| < \delta$. عندئذٍ أي اختيار لـ μ_k تجعل كل مجموع من مجاميع استيلتيس لا يختلف عن التكامل المناظر له إلا في حدود $\frac{\varepsilon}{3}$ أي :

$$\left|\int_a^b - \sum_a^b\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{و} \quad \left|\int_b^c - \sum_b^c\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

$$\text{و} \quad \left|\int_a^c - \sum_a^c\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

عندما يكون $\|\mathscr{P}\| < \delta$. (معنى الاختصار في (5) واضح)؛ بما أنّ $a < b < c$ فالمجموع $\sum_b^c + \sum_a^b$ هو مجموع استيلتيس $\sum_a^c$ للفترة [a, c] . وبذلك يكون في إمكاننا كتابة الآتي :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^c - \left(\int_a^b + \int_b^c\right)\right| &= \left|\left(\int_a^c - \sum_a^c\right) - \left(\int_a^b - \sum_a^b\right) - \left(\int_b^c - \sum_b^c\right)\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^c - \sum_a^c\right| + \left|\int_a^b - \sum_a^b\right| + \left|\int_b^c - \sum_b^c\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

وضحنا أن: $\left|\int_a^c - \left(\int_a^b + \int_b^c\right)\right|$ أصغر من أي عدد موجب، ولهذا السبب فلا بـد أن يساوي الصفر (القيمة المطلقة تضمن أن ذلك $\geqslant 0$). إذن فإن:

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$$

لاحظ أن النظرية 10.6 تفـرض وجوب أن التكـاملات الثـلاثة مـوجودة وتستنتـج أن (4) تصح. في حالة التكامل الريماني فإن النظرية المقـابلة لهذه النـظرية هي (نـظرية 7.3)، وكـان كافياً فرض وجود التكاملين.

$\int_a^b$ ، $\int_b^c$ ؛ إذ إن ذلك يؤدي إلى وجود التكامل $\int_a^c$. إن هذا التضمين غير صحيح في حالة تكامل ريمان ـ استيلتيس كما سنرى في المثال التالي:

مثـــال 10.8:

لنفرض أن:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{if} \quad 1 < x \leqslant 2; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{if} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

فإن $\int_0^1 f\,dg = 0$ ، لأن f دالة صفرية عـلى $[0, 1]$ و $\int_1^2 f\,dg = 0$ ، لأن g دالة ثـابتة على $[1,2]$. ولكن f، g دالتان منفصلتان عند 1؛ لهذا السبب وباستعمال النظرية 10.5، فإن $\int_0^2 f\,dg$ غير موجود.

تمارين 10.3

في التمارين من 1 إلى 6 احسب تكامل ريمان ـ استيلتيس.

1 ـ $\int_0^4 x^2\,d([x])$ عندما $[x]$ تعني دالة أكبر عدد صحيح.

2 ـ $\int_0^\pi x\,d(\cos x)$

3 ـ $\int_0^1 x^3\,d(x^2)$

4 - $\int_{-1}^{2} \sqrt{x+2}\, d([x])$

5 - $\int_{a}^{c} f\, dg$ عندما تكون f متصلة و

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{if} \quad b < x \leqslant c, \end{cases}$$

6 - $\int_{a}^{c} f\, dg$ عندما تكون f متصلة و

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x = b \in (a, c) \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

7 - برهن الجزء (أ) من النظرية 10.4.

8 - برهن الجزء (ب) من النظرية 10.4.

9 - برهن الجزء (ج) من النظرية 10.4.

10 - برهن الجزء (د) من النظرية 10.4.

11 - لنفرض أن f دالة متصلة على $[a, b]$ وأن g دالة سُلّميّة بحيث يكون $g(x) = \sigma_k$ إذا كان $a_{k-1} < x < a_k$ وعندما:

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b.$$

برهن أن:

$$\int_{a}^{b} f\, dg = \sum_{k=1}^{m} f(a_k)(\sigma_k - \sigma_{k-1}) + f(a)\left[\sigma_1 - g(a)\right] + f(b)\left[g(b) - \sigma_m\right]$$

(قارن ذلك بالتمرينين 10.3.5 و 10.3.6).

12 - برهن النظرية 10.6 في حالة $a < c < b$. (استعمل المعادلة (3) والحالة $a < b < c$ في برهان النظرية 10.6).

13 - في المثال 10.8 وضح أن $\int_{0}^{2} f\, dg$ غير موجود وذلك بالمناقشة المباشرة من خلال التعريف كما في المثال 10.7.

محتوى هذا البند القصير هو تعريف تكامل ريمان ـ استيلتيس بالتجزيء (تمرين 7.6.8).

نظرية 10.7 : (التكامل بالتجزيء).

إذا كانت f قابلة لتكامل ريمان استيلتيس بالنسبة للدالة g على الفترة [a, b] ، فإن g قابلة للتكامل بالنسبة للدالة f على الفترة [a, b] و

$$\int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a). \qquad (1)$$

البرهان :

أي مجموع إستيلتيس للدالة g بالنسبة للدالة f يمكن أن يُفك فتُعاد كتابته بالطريقة التالية :

$$\sum_{k=1}^{n} g(\mu_k)\left\{f(x_k) - f(x_{k-1})\right.\ldots$$

$$= g(\mu_1)\left\{f(x_1) - f(a)\right\} + g(\mu_2)\left\{f(x_2) - f(x_1)\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + g(\mu_n)\left\{f(x_n) - f(x_{n-1})\right\}$$

$$= - f(a)\,g(\mu_1) - f(x_1)\left\{g(\mu_2) - g(\mu_1)\right\}$$

$$- \ldots - f(x_{n-1}) - g(\mu_{n-1})\left.\right\} + f(b)\,g(\mu_n)$$

$$= - f(a)\,g(a) - \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\left\{g(\mu_{k+1}) - g(\mu_k)\right\} + f(b)\,g(b),$$

هنا أدخلنا $\mu_0 = a$ و $\mu_{n+1} = b$ في السطر الأخير. إن المجموع في السطر الأخير هو مجموع استيلتيس للدالة f بالنسبة للدالة g على التجزيء $\left\{\mu_k\right\}_{k=1}^{n+1}$ مع العلم بأن x_k تنتمي للفترة الجزئية $[\mu_k ، \mu_{k+1}]$.

تؤكد هذه المعادلة بأنه إذا كان مجموع استيلتيس للتكامل $\int_a^b f\,dg$ يتقارب كلما يؤول

$\|\mathcal{P}\|$ إلى الصفر، فإن مجموع إستيلتيس للتكامل $\int_a^b g\,df$ يتقارب أيضاً، وترتبط قيم النهاية لهذين المجموعين بالمعادلة (1).

مثال 10.9:

أحسب $\int_{-1}^{2} x\,d(|x|)$. بما أنّ الدالة $|x|$ دالة مكامل بها غير ملائمة على الفترة التي تحتوي على الصفر، نستخدم التكامل بالتجزيء لكتابة:

$$\int_{-1}^{2} x\,d(|x|) = \left[x \cdot |x|\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} |x|\,d(x). \tag{2}$$

باستخدام النظرية 10.3 فإنّ الطرف الأيمن من (2) يساوي تكامل ريمان $\int_{-1}^{2} |x|$ الذي قيمته $\frac{5}{2}$. باستخدام هذه القيمة في (2) نحصل على

$$\int_{-1}^{2} x\,d(|x|) = 4 - (-1) - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

10.5 قابلية الدوال المتصلة للتكامل

Integrability of Continuous Functions

الخلاصة النهائية في هذا الباب هي النظرية الرئيسية لوجود تكامل ريمان ـ إستيلتيس. مثل هذه النظرية والتي تضمن وجود التكامل لصنف كبير من الدوال المتكررة، والتي تواجهنا في كثير من الأحيان، هي جزء من الدراسة النظرية لأي نوع من التكامل. فعلى سبيل المثال، نتذكر أنه في حالة التكامل الريماني (نظرية 7.7) والتي تمّ برهانها، أن أي دالة متصلة قابلة للتكامل الريماني. في حالة تكامل ريمان ـ استيلتيس لا بد من إضافة فروض أخرى حول الدالة المكاملة والدالة المكامل بها.

نظرية 10.8:

إذا كانت إحدى الدالتين f أو g دالة متصلة والأخرى ذات تغير محدود على $[a, b]$ ، فإن كل واحدة منهما قابلة لتكامل ريمان ـ استيلتيس بالنسبة للأخرى على $[a, b]$.

البرهان :

استناداً للنظرية 10.7 وبحثاً عن التحديد نفترض أن f دالة متصلة وأن g دالة ذات تغير محدود.

وباستخدام النظرية 10.2، نعرف $g = g_1 - g_2$ حيث g_1، g_2 دالتين غير تناقصيتين. إذا برهنا أن $\int_a^b f\, dg_1$ موجود لأي دالة غير تناقصية g_1، فإن $\int_a^b f\, dg_2$ موجود أيضاً. هذا يؤدي إلى وجود $\int_a^b f\, d(g_1 - g_2)$ والذي بدوره يؤدي إلى وجود $\int_a^b f\, dg$. لتسهيل الرموز سنكتب g بدلاً من g_1.

لأي تجزيء $\mathscr{P} = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ ، نفرض أن I_k يدل على الفترة الجزئية ذات الترتيب k أي $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ حيث لقيم:

$k = 1, 2, \ldots, n$ ونُعرِّف m_k و M_k كالآتي:

$m_k = \text{glb}\, \{f(x): x \in I_k\}$ و $M_k = \text{lub}\, \{f(x): x \in I_k\}$.

نعرّف أيضاً المجموع العلوي $S_{\mathscr{P}}$ والمجموع السفلي $s_{\mathscr{P}}$ كالآتي:

$$S_{\mathscr{P}} = \sum_{k=1}^{n} M_k \{g(x_k) - g(x_{k-1})\}$$

و

$$s_{\mathscr{P}} = \sum_{k=1}^{n} m_k \{g(x_k) - g(x_{k-1})\}.$$

إذا كان μ_k في I_k فإن $m_k \leqslant f(\mu_k) \leqslant M_k$ ، ومن ذلك واضح أن

$$s_{\mathscr{P}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k))\, \{g(x_k) - g(x_{k-1})\} \leqslant S_{\mathscr{P}}.$$

إذا كان $\mathscr{P}$ ، $\mathscr{P}^*$ تجزيئين للفترة [a, b] فإن $\mathscr{P}^* \cup \mathscr{P}$ يكون تدقيقاً (refinement) لكليهما. من السهل التحقق من أن تدقيق التجزيء يزيد من مجاميعه السُّفْلية ويُنْقِص مجاميعه العُلوية (تمرين 10.5.4). من ذلك ينتج أن $s_{\mathscr{P}} \leqslant s_{\mathscr{P} \cup \mathscr{P}^*} \leqslant S_{\mathscr{P} \cup \mathscr{P}^*} \leqslant S_{\mathscr{P}^*}$. إذن أي مجموع سفلي أصغر من أو يساوي أي مجموع علوي. من ذلك ينتج أن أصغر حد علوي لفئة المجاميع السفلية لا يمكن أن يزيد عن أكبر حد سفلي لفئة المجاميع العلوية:

$$\underline{J} = \text{lub}_{\mathscr{P}}\, \{s_{\mathscr{P}}\} \leqslant \text{glb}\, \{S_{\mathscr{P}}\} = \overline{J}.$$

نستطيع أن نبرهن على أن $\int_a^b f\, dg = J$ وذلك بتوضيح أن لأي عـدد موجب ε يـوجد عـدد مـوجب δ حيث إن $\|\mathscr{P}\| < \delta$ يؤدي إلى $|S_{\mathscr{P}} - s_{\mathscr{P}}| < \varepsilon$. وبمـا أن أي مجمـوع استيلتيس ذلك باستعمال $\mathscr{P}$ يكون في $[s_{\mathscr{P}} ، S_{\mathscr{P}}]$ وأيضاً J في $[S_{\mathscr{P}} ، S_{\mathscr{P}}]$. ينتج من ذلك أن أي مجموع استيلتيس لا بد أن يكون قريباً في حدود ε من J. إذن وصلنا إلى التأكيد بأن مجموع استيلتيس يتقارب نحو J عندما يؤول $\|\mathscr{P}\|$ إلى الصفر. لاختبار δ نعتمد مرة أخرى على الاتصال المنتظم للدالة f نختار $\delta > 0$ حيث إن لكل x و y في $[a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{[g(b) - g(a)]} \quad \text{يؤدي إلى} \quad |x - y| < \delta$$

(لاحظ أننا نشترط أن $g(b) \neq g(a)$ ، وإلا تكون الدالة g ثابتة مما يجعل الاستنتاج تافهاً (trivial)). إذا كان $\|\mathscr{P}\| < \delta$ و $k = 1, 2, ، \ldots ، n$ فإن:

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$$

إذن $\|\mathscr{P}\| < \delta$ يتضمن أن:

$$S_{\mathscr{P}} - s_{\mathscr{P}} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \{g(x_k) - (x_{k-1})\}$$

$$< \left[\frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \right] \sum_{k=1}^{n} \{g(x_k) - (x_{k-1})\} \quad = \varepsilon.$$

تمارين 10.5

1 - احسب $\int_0^2 x\, d(x - [x])$.

2 - احسب $\int_0^{\pi/2} x\, d(\sin x)$.

3 - احسب $\int_{-2}^{2} x^2\, d(|x|)$.

4 ـ مستخدماً الرموز كما في برهان النظرية 10.8، برهن أنه إذا كان $\mathscr{P}'$ تـدقيقاً للتجـزيء $\mathscr{P}$ فإن:

$$s_{\mathscr{P}} \leqslant s_{\mathscr{P}'} \quad ، \quad S_{\mathscr{P}'} < S_{\mathscr{P}}$$

5 ـ لنفرض أن $\int_a^b f\,dg$ موجود وأن f دالة متصلة على الفترة [a, b]، ونبـدل g بدالـة مكـامل بهـا أخرى h، حيث $h(x) = g(x)$ إذا كـان $x \neq c$ لعدد c في (a, b) . برهن أن:

$$\int_a^b f\,dh = \int_a^b f\,dg.$$

6 ـ لتكن

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{وإذا كان x عدداً قياسياً} \\ 0, & \text{إذا كان x عدداً غير قياسي} \end{cases}$$

ما هي الدالة المكامل بها g حتى يكون $\int_0^1 \varphi\,dg$ موجوداً؟

7 ـ قارن بين فصـل (class) الـدوال القابلة للتكـامل الـريماني وصف الـدوال ذات التغـير المحدود، أي برهن صحة أو عدم صحة كل من التأكيدات الآتيـة: إذا كانت f قـابلة للتكامل الريماني عـلى الفترة [a, b] فـإن f لها تغـير محدود عـلى [a, b] ؛ إذا كانت f ذات تغير محدود على [a, b] فإن f قابلة للتكامل الريماني على [a, b].

الفصل الحادي عشر

١١

متتاليات الدوال

11.1 التقارب النقطي Pointwise Convergence

في الأبواب السابقة استخدم المصطلح متتالية (sequence) أساساً ليعني «متتالية الأعداد» أو المتتالية العددية. وقابلنا متتالية الفترات في نظرية الفترات المتداخلة، غير أن ذلك كان الوضع الوحيد التي أخذنا فيه في الاعتبار متتالية لأشياء لم تكن عناصراً في $\mathbb{R}$.

ونقدم الآن مفهوم متتالية الدوال. نفرض أن D فئة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولكل n في $\mathbb{N}$، نأخذ f_n دالة في D إلى $\mathbb{R}$؛ أي أنّ نطاق كل من f_n هو D ومداها هو $\mathbb{R}$، عندئذ تقول: إن $\{f_n\}$ هي متتالية دوال (function sequence).

والشرط بأن كل دالة من f_n يجب أن يكون لها النطاق نفسه هو شرط أقوى بعض الشيء مما نحتاجه. غير أنه يجب أن يكون لدينا بعض النقط التي تكون فيها كل الدوال في $\{f_n\}$ معرّفة. وفئة كل هذه النقط هي تقاطع النطق: $\bigcap_{k=1}^{\infty} \text{dom } f_n$. ويمكن أن نسمي هذه الفئة D ونتجاهل ببساطة تلك الأجزاء من النطق التي ليست في D، إلا أنه يظل من الضروري أن نعلم أن D ليست خالية ولذا مؤقتاً سنشترط أن D غير خالية، وأن f_n معرّفة في D.

تعريف 11.1:

تكون متتالية الدوال $\{f_n\}$ تقاربية نقطياً على D إذا كانت المتتالية العددية $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

تقاربية لكل x من D. وعندما تكون $\{f_n\}$ تقاربية نقطياً على D فإن فئة قيم النهايات تعرّف الدالة F كما يلي:

$$F(x) = \lim_n f_n(x) \quad ، \quad x \in D \quad \text{لكل}$$

وبذلك فإن نطاق F هو أيضاً D، وتسمى F بدالة النهاية للمتتالية $\{f_n\}$. وهذه الحالة توصف أيضاً بالعبارة «$\{f_n\}$ تتقارب نقطياً إلى F في D» ويرمز لها بالرمز «$F \to f_n$ على D».

مثــال 11.1:

نفرض أن:

$$f_n(x) = 3x + \frac{x^2}{n} \quad \text{على } \mathbb{R}\text{؛}$$

عندئذ لكل x من $\mathbb{R}$ يكون:

$$\lim_n \left(3x + \frac{x^2}{n}\right) = 3x.$$

وبالتالي فإن $F(x) = 3x$ على $\mathbb{R}$.

مثــال 11.2:

نفرض أن:

$$f_n(x) = x^n \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

عندئذٍ فإن:

$$\lim_n x^n = 0 \quad , \quad 0 \leqslant x < 1,$$

و $f_n(1) = 1$ لكل n.

وبذلك فإن $\{x^n\} \to F$ حيث:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & , \quad x = 1. \end{cases}$$

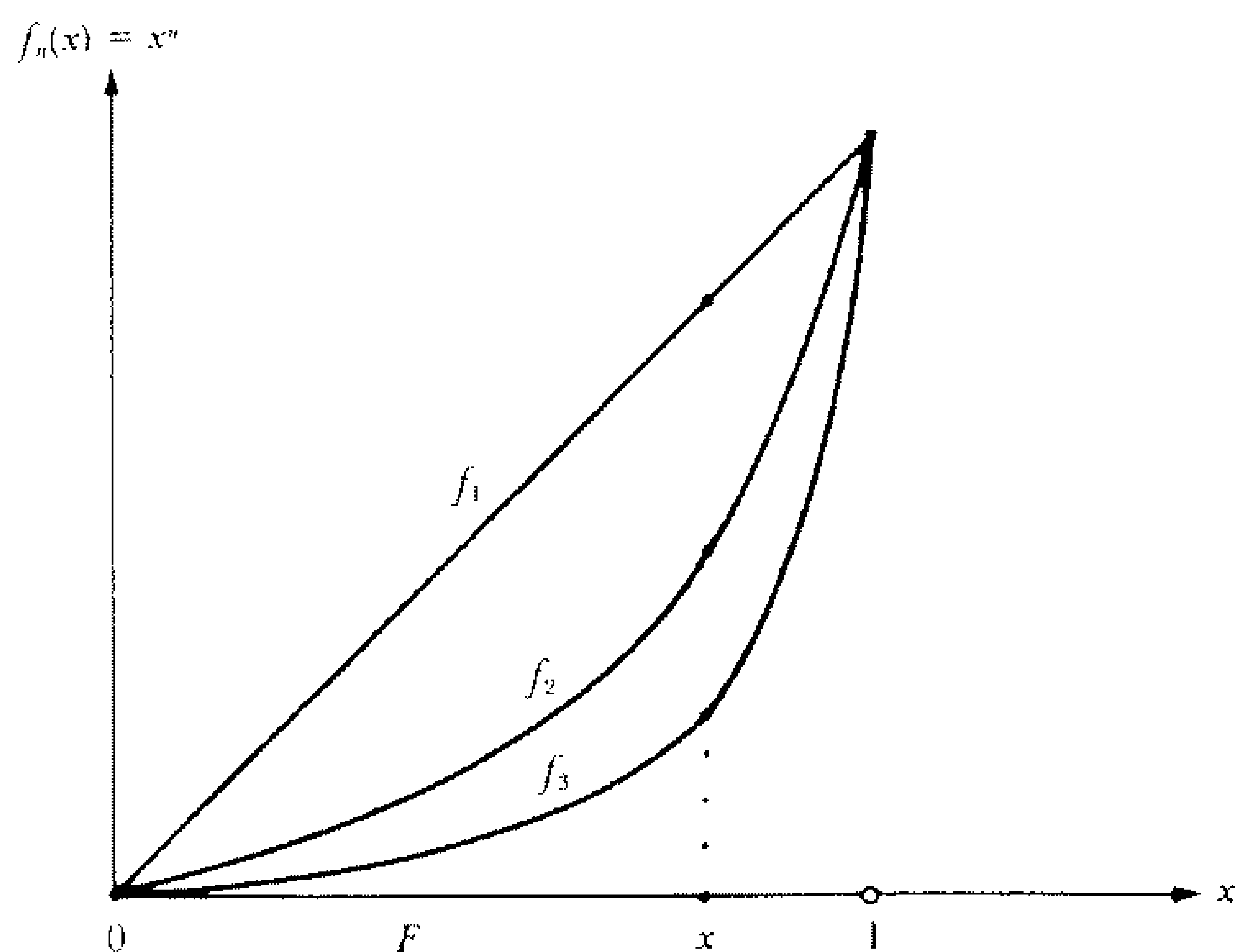
ويمكن أن نورد تعريف التقارب النقطي بشكل دقيق بالمصطلحات الأساسية كما يلي:

$f_n \to F$ على D بشرط أنه لكل x في D وكل عدد موجب ε يوجد عدد N_x بحيث إن:

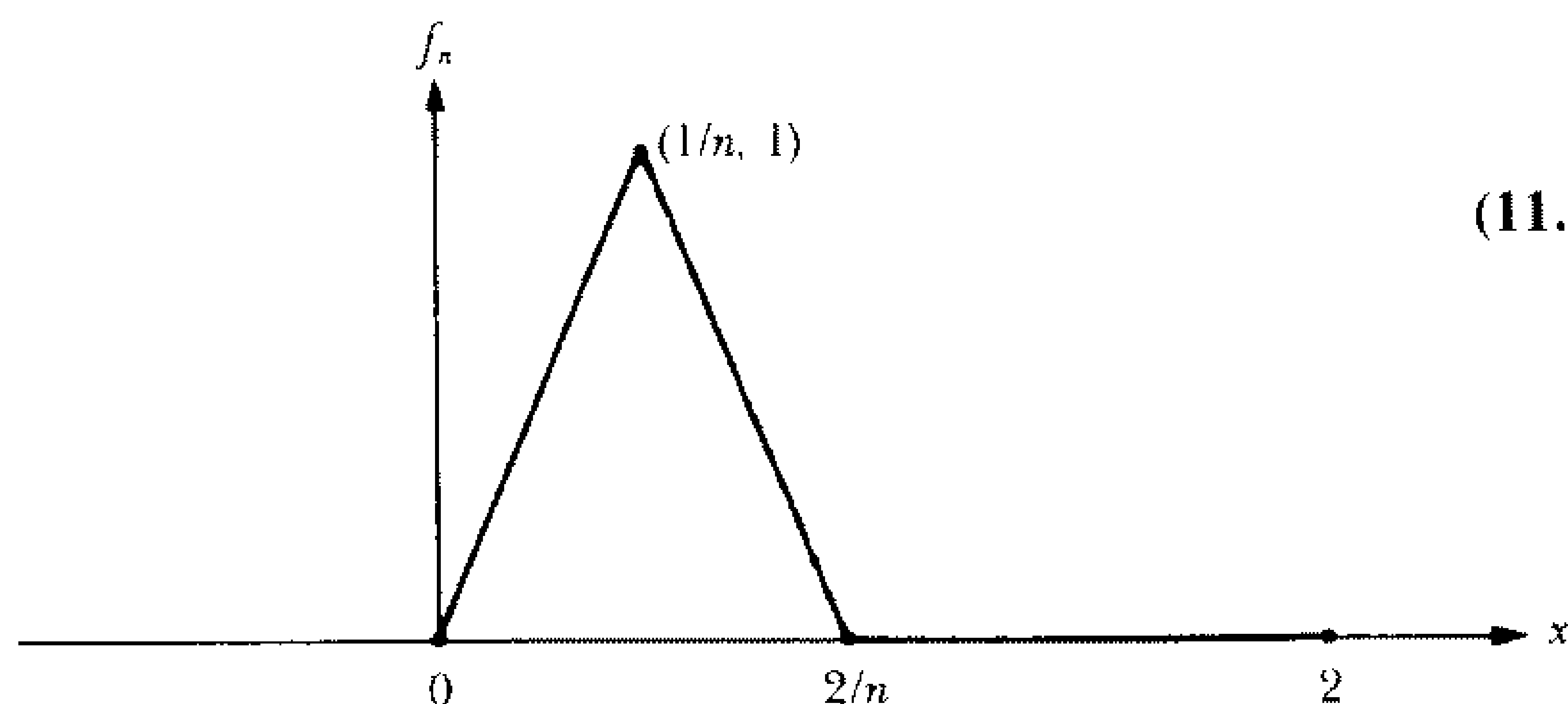
$n > N_x$ تؤدي إلى $|f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$. (1)

ويمكن توضيح مفهوم تقارب متتالية الـدوال بيانيـاً برسم منحنيـات الدوال عـلى مجموعـة مشتركة من المحاور الإحداثية، وقد قمنا بذلـك في الشكل 11.1 للمتتـالية $\{x^n\}$ الـواردة في المثال 11.2. لكل $x \in [0, 1)$ تعطي المتتالية العددية $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ الاحداثيات الرأسية للمتتالية المتناقصة من النقط التي تؤول إلى المحور x وهو منحني F في $[0, 1)$. ولكل n يكون $f_n(1) = 1$ ومن ثم فكـل المنحنيات تحتوي النقطة $(1,1)$ و $F(1) = 1$.

وبالطبع فإن هذا المثال قد اختير، لأن الدوال تسلك سلوكاً معتاداً للغايـة وبالتـالي يسهل رسمها. وتوجد حالات يكون فيها وصف متتالية الدوال برسم منحنيات f_n أسهل من اعطاء علاقاتها. ويمثل الشكل 11.2 مثالاً على ذلك (أنظر تمرين 11.2.6).



شكل **(11.1)**



شكل **(11.2)**

مثـــال 11.3 :

إذا كانت f_n هي الدالة المبين منحنـاها في شكـل 11.2 فإن $f_n \to \Phi$ عـلى $[0, 2]$ حيث $\Phi(x)$ تساوي الصفر بالتطابق؛ لأنه إذا كان $x > 0$.

فـــإن $n > \frac{2}{x}$ يــؤدي إلى أن $x > \frac{2}{n}$

ولـــذا فـــإن $f_n(x) = 0$.

وحـــيـــث أن $f_n(0) = 0$ لكل n نرى أن $\lim_n f_n(x) = 0$ لكل x من $[0,2]$.

11.2 التقارب المنتظم

يتضـــح مـن الشـكلين 11.2، 11.1 أنــه لـكـــل n تــوجـــد نقط x في الـنـــطاق حيث $|f_n(x) - F(x)| > \frac{1}{2}$. وبالطبـع إذا تم الاحتفاظ بــ x هـذه ثابتـة في حين $n \to \infty$ ، فإن هذا الفرق يصبح صغيراً بأية درجة اختيارية لقيم n الكبيرة كبراً كافياً. غير أنه ستـوجد دائـماً نقط أخرى في النـطاق، حيث يكون $|f_n(y) - F(y)| > \frac{1}{2}$. ويمكن وصف هـذه الظاهرة بـالقول: بـأن $\{f_n(x)\}$ تتقارب بمعـدلات مختلفة لقيم x المختلفـة. وقد يكـون من الأنسب إذا كانت $\{f_n(x)\}$ تتقارب بمعدل منتظم داخل النطاق.

تعريف 11.2 :

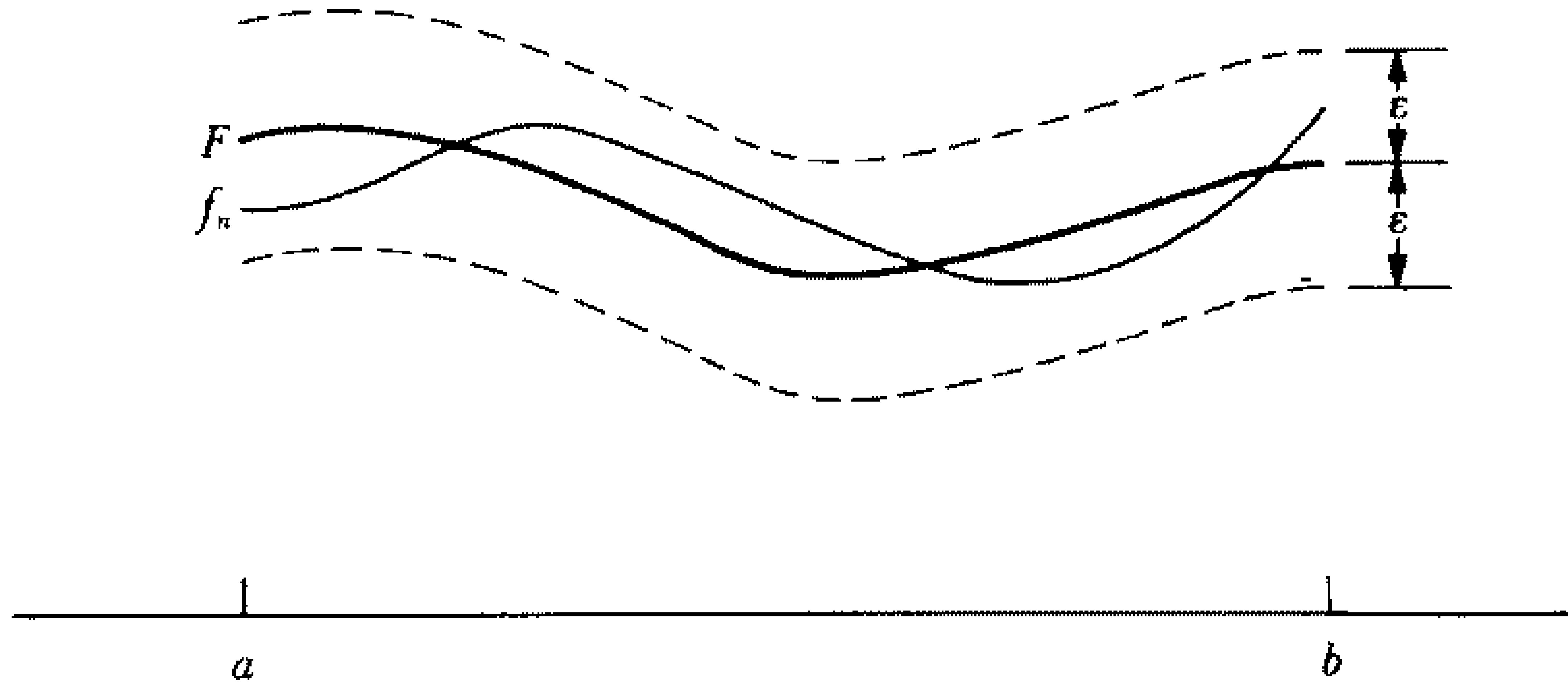
إنّ متتالية الـدوال $\{f_n\}$ تقاربيـة بانتـظام (uniformly convergent) على D إلى الـدالة F بشرط أنه إذا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد العدد N بحيث إنه لكل من x في D:

(2) $n > N$ يؤدي إلى $|f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$

وهذه الجملة تشبه كثيراً (1) الذي يعطي التعريف بـواسطة ابسيلون (ε) للتقـارب النقطي. والفرق الجوهري الوحيد هو وضع العبارة «لكل من x في D».

(الكلمة لكل x تغيرت: إلى (لكل من x) للتأكيد. على أن الأمر يكمن ـ فقط ـ في مكان العبارة في تركيب التعريف مما يغير من تأثيرها). ففي تعـريـف التقارب النقـطي وضعت هذه العبارة قبل ضمان وجود N_x، وبذلك فالعدد N_x يعتمد على x وكـذلك عـلى ε على السـواء،

وهذا هو سبب كتابة N_x بالدليل التحتي x. ولكن تعريف التقارب المنتظم يؤكد على وجود N قبل أي ذكر للعدد x، وبذلك فإن N يجب أن يكون كبيراً بدرجة كافية لضمان التضمين المعرِّف (2) دون أن يعتمد ذلك على النقطة في D حيث تحسب قيمة الدالة عندها.



شكل (11.3)

ويتضح الفرق بين مفهومي تقارب متتاليات الدوال من المتتاليتين في الشكلين 11.2 و 11.1. فعلى الرغم من أن كلاً من المتتاليتين تقاربيتان نقطياً على [0, 1]، فهما غير منتظمتي التقارب في هذه الفترة لأنه كما لاحظنا يكون اختيار n كبيراً غير كافي لضمان أن $|f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ لكل من x في [0, 1].

ويحتوي شكل 11.3 على رسم توضيحي لتعريف التقارب المنتظم. ولغرض التوضيح رسمت الدالتان F، $\{f_n\}$ متصلتين واعتبرنا D هو الفترة [a, b]. ولعدد موجب معطى ε رسم شريط حول منحني F، ويحتوي الشريط على كل النقط التي تقع داخل ε وحدة من منحني F. وينص تعريف التقارب المنتظم على أنه عندما تكون $n > N$ يكون منحني f_n واقعاً بأكمله داخل هذا الشريط. وبذلك فعلى الأكثر قد يوجد عدد محدود من الدوال (N يجب أن تكون قيمة محددة) تكون بعض الأجزاء من منحنياتها واقعة خارج الشريط. ولا ينبغي المبالغة في القول: بأن التقارب المنتظم هو شرط قوي جداً حتى ليصعب التوصل إليه.

وإذا تقاربت $\{f_n\}$ بانتظام في D إلى F، فإننا نختصر ذلك بالرمز « $f_n \Longrightarrow F$ على D». لاحظ أن السهم المزدوج يقابل السهم الأحادي الذي يرمز للتقارب النقطي ويختلف عنه. وعلى الرغم من أن التقارب النقطي لا يتضمن التقارب المنتظم (كما في المثالين 11.3 و 11.2) إلا أن العكس صحيح ويسهل التحقق منه.

مفترض 11.1 :

إذا تقاربت متتالية الدوال $\{f_n\}$ بانتظام على D إلى F، فإن $\{f_n\}$ تتقارب نقطياً على D إلى F.

البرهان :

إذا كان $\varepsilon > 0$ فإن العدد N المضمون وجوده بالتقارب المنتظم يمكن استخدامه بوصفه N_x لتحقيق شروط تعريف التقارب النقطي.

مثــال 11.4 :

إذا كـانت $f_n(x) = x^n$ فـإن $\{f_n\}$ تتقـارب بـانتـظام عـلى $[0, \frac{1}{2}]$ إلى Φ، حيث $\Phi(x) = 0$ لكـل x. ويمكن التحقق من ذلك كما يلي:

إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، نختار N بحيث يكـون $(\frac{1}{2})^N < \varepsilon$ عندئـذ لأي x في $[0 ، \frac{1}{2}]$ يؤدي $n > N$ إلى:

$$|f_n(x) - F(x)| = |x^n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^N < \varepsilon$$

مثــال 11.5 :

إذا كـان $f_n(x) = x + \frac{3}{n}$ ، فـإن $\{f_n\} \Longrightarrow F$ عـلى $\mathbb{R}$، حيث $F(x) = x$.

لأن:

$$|f_n(x) - F(x)| = \left|\left(x + \frac{3}{n}\right) - x\right| = \frac{3}{n},$$

لكل x من $\mathbb{R}$ ولكل n من $\mathbb{N}$.

وهذه طريقة أخرى لتمييز التقارب المنتظم تكون مناسبة أكثر للتحقق من التقارب المنتظم في أمثلة محددة. بالعودة إلى شكل 11.3 نتذكر بأن تعريف المتباينة $|f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ يعني أن منحني f_n يقـع بأكمله داخـل شريط عرضـه 2ε يحيط بمنحني F. وهذا يعني أنـه في D لا يزيد أكبر فرق بين $f_n(x)$ و $F(x)$ عن ε ونكتب ذلك في الصورة:

$\underset{x \in D}{\text{lub}} |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$. (نقـول lub بدلاً من «max»؛ إذ لا يمكننـا الافـتراض بـأنّ

$F - f_n$ يصل إلى نهايته العظمى على D). وهذه الملاحظات ترد صورياً (شكلياً) في النظرية المساعدة التالية.

نظرية مساعدة 11.1:

تتقارب متتالية الدوال $\{f_n\}$ بانتظام على D إلى F إذا وفقط إذا كانت:

$$\lim_n \left\{ \operatorname{lub}_{x \in D} |f_n(x) - F(x)| \right\} = 0.$$

وفي كثير من الحالات تكون الدالتان F ، f_n قابلتين للتفاضل، وعندئذٍ يمكن حساب $\operatorname{lub}_{x\in D} |f_n(x) - F(x)|$ صراحةً بالاستعانة بطرق حساب التفاضل الأولية لتعيين القيم العظمى. والمثال التالي يوضح هذه العملية.

مثال 11.6:

إذا كانت $f_n(x) = nxe^{-nx}$ ، $\Phi(x) = 0$ فإن $f_n \Longrightarrow \Phi$ على $[1, \infty)$.
وأيضاً $f_n \to \Phi$ على $(0, \infty)$ ، ولكن التقارب غير منتظم على $(0 ، \infty)$. وللتحقق من هذه المقولات نحسب في البداية:

$$f'_n(x) = ne^{-nx} - n^2xe^{-nx} = ne^{-nx}(1 - nx).$$

ومن الواضح الآن أن f_n لها قيمة عظمى معطاة بـ

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}\right)e^{-n(1/n)} = \frac{1}{e},$$

و f_n تناقصية على $\left(\frac{1}{n} ، \infty\right)$ ، لأن f'_n سالبة في هذه الفترة. ولذا:

$$\operatorname{lub}_{x\geq 1} |f_n(x) - F(x)| = \max_{x \geq 1} |f_n(x)| = f_n(1) = ne^{-n}$$

وبتطبيق قاعدة هوبيتال نرى أن $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ ، ولذا ينتج أن $\lim_n ne^{-n} = 0$. ومن ثم $f_n \Longrightarrow 0$ على D.

بقاعدة هوبيتال (المثال نفسه) ينتج أن $f_n \to \Phi$ على $(0 ، \infty)$ ولكن التقارب ليس منتظماً على $(0 ، \infty)$ ؛ لأن كل f_n تأخذ القيمة $\frac{1}{e}$ لبعض x في $(0 ،\infty)$. وحيث إن مفهوم التقارب المنتظم دقيق بعض الشيء فمن المفيد أن نورد نصاً دقيقاً لنفيه (negation).

تعريف 11.3:

لا تتقـارب متتاليـة الدوال $\{f_n\}$ بـانتظام عـلى D إلى الدالـة F إذا وجد العـدد الموجب ε بحيث إنه لعددٍ كبيراً لانهائياً n في $\mathbb{N}$ يوجد العدد x_n في D الذي يحقق:

$$|f_n(x_n) - F(x_n)| \geqslant \varepsilon.$$

وفي تمارين 11.2 يمكن استخدام هذا التعريف أو النظرية المساعدة 11.1 لإثبات اللاانتظام في التقـارب. ولإثبات تحقق التقـارب المنتظم تُعْتبر النظرية المساعـدة 11.1 هي الـوسيلة الأفضل.

تمارين 11.2

بيّن في المسائـل من 1 إلى 5 أن متتاليـة الدوال المعـطاة تتقارب بـانتظام عـلى D ولكن بلا انتظام على D′.

1 ـ $D' = [0 ، \infty)$ ؛ $D = [0, 1]$ ؛ $f_n(x) = \dfrac{x}{x + n}$.

2 ـ $D' = \left[0 ، \dfrac{\pi}{2}\right)$ ؛ $D = \left[0 ، \dfrac{\pi}{4}\right]$ ؛ $f_n(x) = \sin^n x$.

3 ـ $D' = [0 ، 1)$ ؛ $D = \left[0 ، \dfrac{1}{2}\right]$ ؛ $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$.

4 ـ $D' = [0 ، \infty)$ ؛ $D = [1 ، \infty)$ ؛ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^2}$.

5 ـ $D' = [0 ، \infty)$ ؛ $D = [1 ، \infty)$ ؛ $f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}$.

6 ـ عين صيغة صريحة للدالة f_n المبيّنة في شكل 11.2.

في المسائل من 1-5 لا تكون فترة التقارب المنتظم D هي أكبر فترة ممكنة. على سبيل المثال، يمكن أن نأخذ بدلاً من D في المسألة 4، $D'' = [\delta ، \infty)$ لأي قيمة δ موجبة. وفي المسـائل 7-11 يُطلب برهنة ذلك وإجراء التمديدات اللازمة للفترة D للمسائل 1-5.

لاحظ أن $\{f_n\}$ يمكن أن تتقارب بانتظام على $[\delta, \infty)$ لكـلٍ $\delta > 0$ ومع ذلك تظل غير تقاربية بانتظام على $(0 ، \infty)$.

7 ـ أثبت أنه : إذا كان $b > 0$ ، $f_n(x) = \dfrac{x}{x + n}$ ، فإن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام على $[0 ، b]$.

8 ـ أثبت إنه : إذا كان $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$ ، $f_n(x) = \sin^n x$ ، فإن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام على $\left[0 ، \left(\dfrac{\pi}{2} - \delta\right)\right]$.

9 ـ أثبت أنه : إذا كان $0 < \delta < 1$ ، $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$ ، فإن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام على $[0 ، 1 - \delta]$.

10 ـ أثبت أنه : إذا كان $\delta > 0$ ، $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^2}$ ، فإن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام على $[\delta ، \infty)$.

11 ـ أثبت أنه : إذا كانت $\delta > 0$ ، $f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}$ ، فإن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام على $[\delta ، \infty)$.

11.3 متتاليات الدوال المتصلة

ندرس في البنود 11.3، 11.4 و 11.5 تقارب متتاليات الدوال التي تكون فيها لكل f_n خاصية معينة، ونبحث ما إذا كان ينبغي على دالة النهاية F أن تتميز بهذه الخاصية أم لا. على سبيل المثال، إذا كانت كل من f_n متصلة على D، فهل ينتج أن F تكون أيضاً متصلة؟

والإجابة هي : لا، ويمكن أن نورد المثال 11.2 كمثال مضاد. فكل f_n متصلة على $[0, 1]$ ولكن دالة النهاية منفصلة عند 1. ومن ناحية أخرى فإذا كانت $D = \left[0 ، \dfrac{1}{2}\right]$ ، كما في المثال 11.4 فإن دالة النهاية تساوي الصفر بالتطابق على D، وبالتالي فهي متصلة بالتأكيد

هناك. وكما رأينا في مثال 11.4 تتقارب المتتالية $\{x^n\}$ بانتظام على $\left[0 ، \frac{1}{2}\right]$ ، في حين لا يكون التقارب منتظماً على $[0, 1]$. وتبيّن النظرية التالية أن التقارب المنتظم هو الذي يشكل هذا الفرق.

نظرية 11.1:

إذا كانت متتالية الدوال $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام على D إلى الدالة F، وكانت كل f_n متصلة على D، فإن F متصلة على D.

البرهان:

نفرض أن a نقطة اختيارية في D. أن $\varepsilon > 0$ ، ونريد أن نثبت اتصال F عند a بإثبات أن $|F(x) - F(a)| < \varepsilon$ عندما تكون x قريبة قرباً كافياً من a. وفي البداية ندرس المتباينة:

$$|F(x) - F(a)| =$$

$$= |F(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - F(a)|$$

$$\leqslant |F(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - F(a)|, \qquad (1)$$

التي تنتج بإضافة وطرح حدود، والاستعانة بمتباينة المثلث. وحيث إن $f_n \Longrightarrow F$ على D فإنه يمكننا اختيار N بحيث يكون لأي x في D (بما في ذلك $x = a$).

$$|f_N(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

وحيث إن f_N متصلة عند a، فإنه يوجد عدد موجب δ بحيث أنه حين يكون x في D فإن:

$$(2) \qquad |x - a| < \delta \quad \text{يؤدي إلى} \quad |f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ومن (1) و(3) نرى أن $|x - a| < \delta$ تؤدي إلى:

$$|F(x) - F(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

وبذلك أثبتنا أن F متصلة عند a.

وتقدم لنا النظرية 11.1 طريقة عملية لإثبات أن تقارب متتالية الدوال المتصلة ليس منتظماً:

إذا كانت دالة النهاية غير متصلة على D، فإن التقارب لا يمكن أن يكون منتظماً. ويمكن أيضاً اعتبار أن النظرية 11.1 مثالاً «لتغيير ترتيب عمليتي النهاية»؛ لأن اتصال F عند a يعني أن:

$$F(a) = \lim_a F(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \lim_n f_n(x) \right\}, \tag{3}$$

في حين أن التعريفين $f_n \to F$ واتصال f_n يعنيان أن:

$$F(a) = \lim_n f_n(a) = \lim_n \left\{ \lim_{x \to a} f_n(x) \right\}. \tag{4}$$

وعندما نقارن الأطراف اليمنى للعلاقتين (4) و (3) نرى أنهما لا يختلفان إلا في ترتيب أخذ النهايتين.

وتنص النظرية 11.1 على أنه عند التقارب المنتظم فإن ترتيب عمليتي النهاية غير هام.

رأينا في النظرية 11.1 أن افتراضنا للتقارب المنتظم يسمح لنا باستنتاج أن اتصال الدالة النهاية ينتقل (يورث) من الدوال في المتتالية التقاربية. والآن نتساءل عما إذا كان يمكن اثبات العكس، أي إذا علمنا بأن دالة النهاية متصلة على D فهل يمكن أن نستنتج من ذلك أن التقارب يجب أن يكون منتظماً؟ وهذا المعكوس ليس صحيحاً في الحالة العامة كما رأينا في المثال 11.3. غير أن هذا التضمين يمكن إثباته بهذه الطريقة لمتتاليات الدوال التي تسلك سلوكاً مطرداً. والنظرية التالية تنسب إلى عالم الرياضيات الإيطالي ديني (Dini).

تعريف 11.4:

تكون متتالية الدوال $\{f_n\}$ متتالية دوال غير تناقصية على D إذا كانت المتتالية $\{f_n(x)\}$ لكل x في D متتالية عددية غير تناقصية. وبالمثل فإن $\{f_n\}$ متتالية دوال غير تزايدية على D إذا كانت المتتالية $\{f_n(x)\}$ لكل x في D متتالية عددية غير تزايدية. وإذا كانت $\{f_n\}$ غير تناقصية أو غير تزايدية فإنها تسمى متتالية دوال مطردة (monotonic).

وفي شكل 11.1 بينت متتالية دوال غير تزايدية (أنظر مثال 11.2)، ويجب أن نشير إلى أنه لكل n يكون منحني f_{n+1} واقعاً بأكمله أسفل أو أعلى منحني f_n. وإذا كانت $\{f_n(x')\}$

تتزايد لقيمة واحدة x' في حين أن $\{f_n(x'')\}$ تتناقص لقيمة أخرى x''، فإن $\{f(x_n)\}$ لا تكون متتالية دوال مطردة.

نظرية 11.2 : نظرية ديني (Dini).

نفرض أن $\{f_n\}$ متتالية دوال مطردة تقاربية تقارباً نقطياً على $[a, b]$ إلى الدالة F. إذا كانت F وكل f_n متصلة على $[a, b]$ عندئذ تتقارب $\{f_n\}$ تقاربية بانتظام على $[a, b]$ إلى F.

البرهان :

الحالة (أ) : نفرض أن $\{f_n\}$ غير تزايدية وأن $F = \Phi$ (صفراً بالتطابق). ونفرض أن التقارب غير منتظم على $[a, b]$. عندئذٍ يوجد عدد موجب ε بحيث إنه لكل N يوجد العدد الصحيح $n(N) \geqslant N$ والعدد $x_{n(N)}$ في $[a, b]$ بحيث يكون :

$$f_{n(N)}(x_{n(N)}) \geqslant \varepsilon.$$

ووفقاً لنظرية بولتزانو ـ ڤيرشتراس يكون للمتتالية المحدودة $\{x_{n(N)}\}$ متتالية جزئية تقاربية. وحيث إن $a \leqslant x_{n(N)} \leqslant b$ فإن نهايتها يجب أن تكون أيضاً في الفترة المغلقة $[a, b]$، وليكن مثلاً $\lim_k x_{n(k)} = c$ حيث $a \leqslant c \leqslant b$. ونأخذ عدداً اختيارياً وليكن N، فإذا كان $n(k) \geqslant N$ فإن اطراد $\{f_n\}$ يؤكد لنا أن :

$$f_N(x_{n(k)}) \geqslant f_{n(k)}(x_{n(k)}) \geqslant \varepsilon. \tag{5}$$

والآن نفرض أن k تؤول إلى ∞ بحيث أن $x_{n(k)}$ تؤول إلى c. إنّ اتصال f_N ومعيار المتتاليات للاتصال (SCC) يتضمنان :

$$\lim_k f_N(x_{n(k)}) = f_N(c) \tag{6}$$

ولكن وفقاً للعلاقة (5) فإن قيم الدالة $f_N(x_{n(k)})$ ليست أصغر من ε طالما كان $n(k) \geqslant N$. ومن ثم فإن (6) تؤدي إلى $f_N(c) \geqslant \varepsilon$. ويصح ذلك لأي عدد اختياري N، ومن ثم يجب أن نستنتج أن $\lim_N f_N(c) \geqslant \varepsilon$ ، أي أن $F \neq \Phi$. وهذا التناقض يكمل برهاننا للحالة (أ).

الحالة (ب): نفرض أن $\{f_n\}$ تتقارب لأية دالة اختيارية F. أي أن $\{|f_n - F|\}$

متتالية غير تزايدية للدوال وتقاربية تقارباً نقطياً إلى Φ. وبالتالي ووفقاً للحالة (أ) فإن $\phi \Longrightarrow |f_n - F|$. وينتج من النظرية المساعدة 11.1 أن $F \Longrightarrow f_n$ وبذلك أثبتنا النظرية.

لاحظ أننا نفترض النطاق في نظرية ديني فترة مغلقة $[a, b]$ ، وهذا يلعب دوراً حاسماً في البرهان. فمحدودية $[a, b]$ مطلوبة لتطبيق نظرية بولتزانو ـ ڤيرشتراس، كما أننا نحتاج أيضاً لمعرفة أن $\{x_{n(k)}\}$ والموجودة في D تضمن أن يكون $\lim x_{n(k)}$ أيضاً في D. وفي الجزء الأخير يمكن أن نفترض فرضاً أضعف من $D = [a, b]$ ؛ على سبيل المثال يمكن أن يكون D اتحاداً لعدد محدود من الفترات المغلقة. ولكن ذلك يبدو مربكاً كما أنه ليس النمط الأعم للنطاق الذي تتحقق فيه نظرية ديني. وحيث إننا لا نهتم بدراسة تركيب الفئات الجزئية لـ $\mathbb{R}$ فيمكننا الاكتفاء فقط بتلك الحالة التي يكون فيها D فترة مغلقة.

11.4 متتاليات الدوال القابلة للتكامل

إن موضوع تغيير ترتيب إجراء النهاية يمكن أن ينشأ لأنماط أخرى من عمليات النهاية، والموضوع الذي ندرسه الآن هو التكامل. نفرض أن كل f_n تكون قابلة للتكامل وفقاً لريمان وأن $f_n \to F$ على $[a, b]$.

وعندئذ نتساءل عما إذا كان ينتج من ذلك أن تكون F قابلة للتكامل، وإذا كان الأمر كذلك فهل تتساوى القيمتان:

$$\int_a^b F = \int_a^b \lim_n f_n \overset{?}{=} \lim_n \left\{ \int_a^b f_n \right\}.$$

والإجابة على هذا السؤال هو بوجه عام لا، ويمكننا أن نورد مثالاً مضاداً بتعديل المتتالية المبينة في الشكل 11.2 (مثال 11.3):

مثال 11.7 :

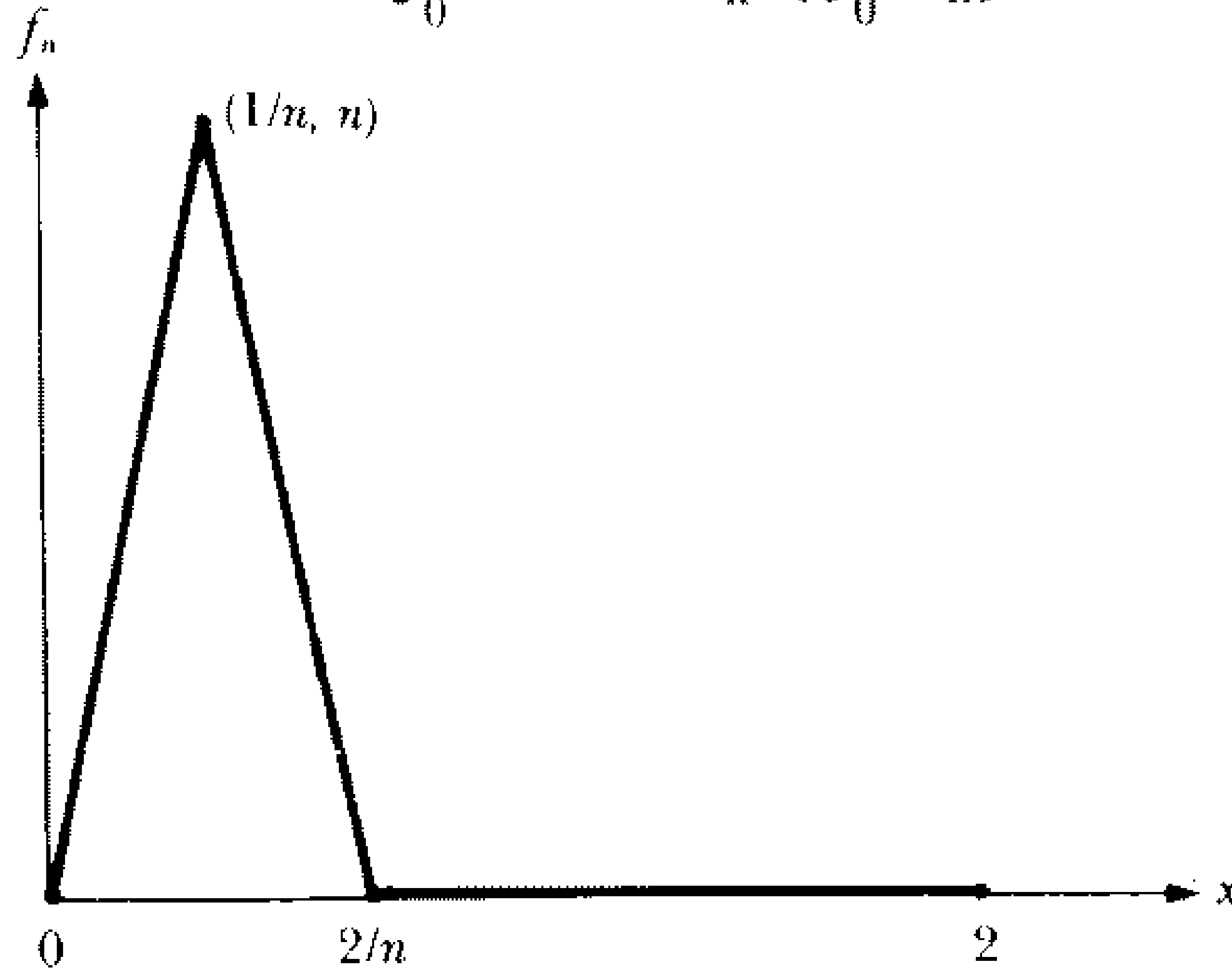
في الشكل 11.4 يُبيِّن منحني f_n أقصى ارتفاع لـ n $f_n\left(\frac{1}{n}\right) =$ ، ولكن يظل لدينا

$f_n \to 0$ في $[0, 2]$ ، وللأسباب نفسها كما في مثال 11.3 .

وأيضاً فإن كل f_n متصلة وبحساب مساحة المثلث تحت المنحني، نرى أن لكل n، $\int_0^2 f_n = 1$.

ولكن $F(x) = 0$ لكل من x، ولذلك فإن:

$$\int_0^2 F \neq \lim_n \left\{ \int_0^2 f_n \right\}.$$



شكل (11.4)

وفي المثال السابق من الممكن ملاحظة أنّ دالة النهاية F قابلة للتكامل، ورغم ذلك فإن قيمة التكامل لا تساوي نهاية قيم التكاملات.

وهذا يترك الموضوع حول أن نهاية الدوال القابلة للتكامل هي دائماً دالة قابلة للتكامل موضوعاً مفتوحاً.

وسوف نثبت عدم صحة هذا الافتراض بالمثال المضاد التالي.

مثال 11.8:

نفرض أن $\{r_k\}$ متتالية بحيث يظهر كل عدد قياسي في $[0, 1]$ مرة واحدة بالضبط كحد لـ r_k (انظر الملحق B للتحقق من وجود مثل هذه المتتالية).

والآن نعرّف:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_k \ (\text{لبعض } k \text{ حيث } k \leqslant n) \\ 0, & \text{في أي مكان آخر} \end{cases}$$

عندئذ فكل عدد قياسي في $[0, 1]$ يكون في نهاية الأمر في الفئة التي لها $f_n(x) = 1$ ويظل هكذا لكل n الكبيرة. ومن ثم فإن $f_n \to \psi$ حيث $\psi(x) = 1$ إذا كان $x \in \mathbb{Q}$ و $\psi(x) = 0$ ، إذا كان x عدداً غير قياسي. والدالة ψ مثال معروف (أنظر مثال 7.2) لدالة غير قابلة للتكامل.

وكما في نظرية 11.1 نثبت الآن أن الافتراض الإضافي بصدد التقارب المنتظم يضمن انتقال قابلية التكامل إلى دالة النهاية.

نظرية 11.3:

إذا كانت متتالية الدوال $\{f_n\}$ تقاربية بانتظام على $[a, b]$ إلى F وكانت كل من f_n قابلة للتكامل على $[a, b]$ ، عندئذ فإن F تكون قابلة للتكامل على $[a, b]$ وعلاوة على ذلك:

$$\int_a^b F = \int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \left\{\int_a^b f_n\right\}. \qquad (1)$$

البرهان:

نبين أولاً أن F قابلة للتكامل على $[a, b]$. نفرض أن $\varepsilon > 0$ ونختار N بحيث إنه إذا كانت x في $[a, b]$ فإن:

$$\left|f_N(x) - F(x)\right| < \frac{\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)}{b - a}. \qquad (2)$$

إذا كان $\mathscr{P}$ أي تجزيء للفترة $[a, b]$ ، فإننا نفرض أن:

$$M_k^N = \text{lub}\left\{f_N(x) : x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k\right\}$$

و

$$M_k = \text{lub}\left\{F(x) : x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k\right\}.$$

عندئذ فإن (2) تضمن أن يكون:

$$\left|M_k - M_k^N\right| \geqslant \frac{\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)}{b - a},$$

ولذا فإن :

$$\left|U(f_N, \mathscr{P}) - U(F, \mathscr{P})\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} (M_k - M_k^N)(x_k - x_{k-1})\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|M_k - M_k^N\right| (x_k - x_{k-1})$$

$$\leqslant \frac{\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \qquad (3)$$

$$= \frac{\varepsilon}{3}$$

وبالمثل فإنه لدينا:

$$\left|L(f_N, \mathscr{P}) - L(F, \mathscr{P})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (4)$$

وحيث إن f_N قابلة للتكامل على $[a, b]$ فإنه يوجد تجزيء $\mathscr{P}$ بحيث إن :

$$\left|U(f_N, \mathscr{P}') - L(f_N, \mathscr{P}')\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (5)$$

ومن (3)، (4)، (5) نرى أن :

$$\left|U(F, \mathscr{P}') - L(F, \mathscr{P}')\right| \leqslant \left|U(F, \mathscr{P}') - U(f_N, \mathscr{P}')\right|$$

$$+ \left|U(f_N, \mathscr{P}') - L(f_N, \mathscr{P}')\right|$$

$$+ \left|(f_N, \mathscr{P}') - L(F, \mathscr{P}')\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ومن ثم وفقاً لمعيار داربو للقابلية للتكامل (النظرية المساعدة 7.3) تكون F قابلة للتكامل على $[a, b]$.

ولإثبات أن $\int_a^b F = \lim_n \left\{\int_a^b f_n\right\}$

نفرض مرة أخرى أن ε عدد اختياري موجب ونختار N' بحيث إن $n > N'$ يؤدي إلى:

$$\underset{x\in[a,b]}{\text{lub}} \left|f_n(x) - F(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

عندئذٍ فإن $n > N'$ يؤدي إلى:

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b F\right| = \left|\int_a^b (f_n - F)\right| \leqslant \int_a^b |f_n - F|$$

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant \left[\frac{\varepsilon}{b-a}\right](b-a) = \varepsilon.$$

ومن ثم فإن:

$$\lim_n \left\{\int_a^b f_n\right\} = \int_a^b F.$$

11.5 متتاليات الدوال القابلة للتفاضل

الخاصية التالية التي نرغب في بحثها بالنسبة إلى متتاليات الدوال هي القابلية للتفاضل.

رأينا في المثال 22.2 متتالية $\{x^n\}$ تتقارب نقطياً على $[0,1]$ إلى دالة النهاية غير القابلة للتفاضل عند $x = 1$. وبالطبع فالتقارب غير منتظم على $[0, 1]$، وإذا قيدنا النطاق على $]\frac{1}{2}، 0[$ فإن دالة النهاية تساوي صفراً بالتطابق، وهي بالتأكيد دالة قابلة للتفاضل. وتقارب $\{x^n\}$ منتظم على $]\frac{1}{2}، 0[$؛ ونحن حتى الآن مستعدون لتوقع أن التقارب المنتظم يضمن أن دالة النهاية ستكتسب الخاصة المطلوبة من دوال المتتالية.

ولكن الأمر ليس كذلك في حالة القابلية للتفاضل؛ إذ إننا سنرى في المثال التالي متتالية من دوال قابلة للتفاضل تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$ إلى دالة نهاية غير قابلة للتفاضل.

مثـال 11.9:

إذا كانت $f_n(x) = \sqrt{x^2 + (1/n^2)}$

فإن $|x| \Longrightarrow f_n$ في $\mathbb{R}$.

نعلم أن $|x|$ غير قابلة للتفاضل عند الصفر، وقبل التحقق من أن $|x| \Longrightarrow f_n$ على

ℝ، نلاحظ أن منحني f_n هو الفرع العلوي للقطع الزائد المعطى بالمعادلة:

$$\frac{y^2}{\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1.$$

(انظر شكل 11.5).

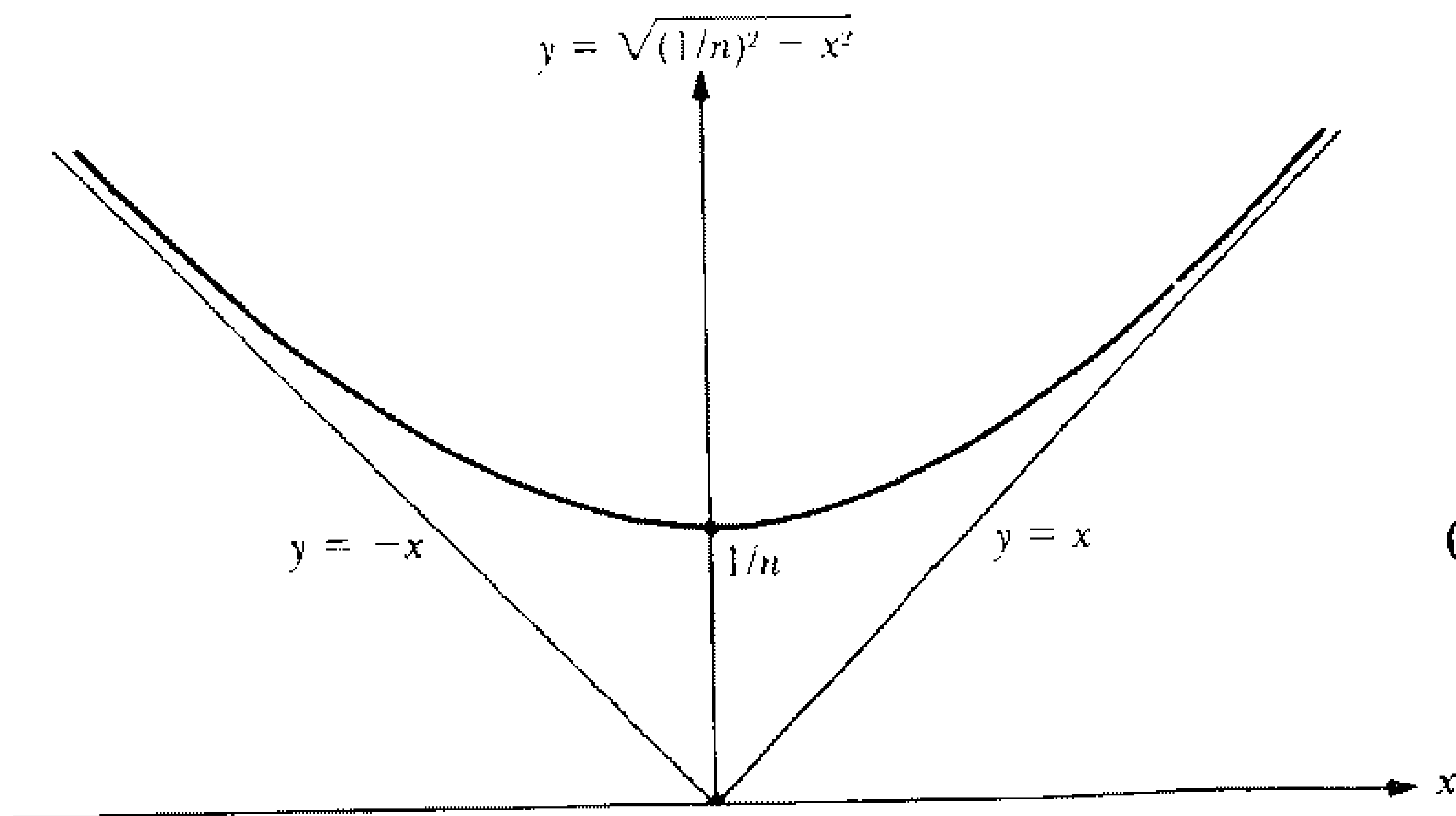
ولبرهنة ادّعائنا بالتقارب المنتظم نجري بعض العمليات الجبرية:

$$\left|f_n(x) - |x|\right| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right)} - \sqrt{x^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right)} - \sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{x^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right) - x^2}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt{x^2}} \leqslant \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{n}.$$

ومن الواضح الآن أن $\lim_n \left\{\operatorname{lub}_{x\in R} \left|f_n(x) - |x|\right|\right\} = 0$ ومن ثم وفقاً للنظرية المساعدة 11.1 تكون $|x| \Longrightarrow f_n$.



شكل (11.5)

وعلى الرغم من أن المثال السابق قد حطم اليقين بحدسنا فهو ليس نهاية المتاعب. فنحن نود أيضاً أن نعلم ما إذا كانت متتالية الدوال القابلة للتفاضل تتقارب إلى دالة قابلة للتفاضل، وعما إذا كانت نهاية مشتقاتها تساوي مشتقة دالة النهاية أي :

$$\lim_n f'_n \overset{?}{=} (\lim f_n)'. \qquad (1)$$

وفي المثال التالي سنرى أن هذا غير أكيد حتى عندما تتقارب الدوال القابلة للتفاضل تقارباً منتظماً إلى دالة قابلة للتفاضل.

مثـال 11.10 :

إذا كانت :
$$f_n(x) = \frac{x}{(1 + nx^2)}$$

فإن $f_n \Longrightarrow \Phi$ في $[0 ، \infty)$ حيث $\Phi(x) \equiv 0$. وللتحقق من ذلك نعيّن أولاً المشتقة

$$f'_n(x) = \frac{(1 + nx^2) - x \cdot 2nx}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}$$

وبذلك يكون للدالة f_n قيمة عظمى عند $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ و

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

وبذلك، فمن الواضح أن $\lim_{x \geq 0} |f_n(x)|$ يؤول إلى 0 عندما $n \to \infty$ ، مما يعني أن $f_n \Longrightarrow 0$ في $[0 ، \infty)$. وبالطبع فإن $\Phi' = \Phi$ ومن ثم فإن Φ قابلة للتفاضل.

والآن ندرس $\lim_n f'_n$: إذا كان $x \neq 0$ فإن :

$$\lim_n f'_n(x) = \lim_n \frac{(1 - nx^2)}{(1 + nx^2)^2}$$

$$= \lim_n \frac{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{x^2}{n}\right)}{1 + 2x^2 / n + x^2} = 0;$$

وإذا كان $x = 0$ فإن $\lim_n f'_n = 1$.

ومن ثم فإن:

$$\lim_n f'_n(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \neq \Phi(x).$$

وحتى الآن يمكننا أن نتساءل عن وجود علاقة بين قابلية دالة النهاية للتفاضل والتقارب المنتظم، ولذا فقد حان الوقت لنورد نظرية تعطى مثل هذه العلاقة. والمفتاح هو في افتراض التقارب المنتظم للمشتقات $\{f'_n\}$ لا للدوال $\{f_n\}$. والنظرية التي نثبتها هنا ليست هي الأعم، غير أنّ إضعاف الفرضيات كان سيستدعي برهاناً أكثر تعقيداً.

نظرية 11.4:

نفترض أن $\{f_n\}$ متتالية دوال، بحيث يكون لكل f_n مشتقة متصلة على $[a, b]$، $\{f_n(c)\}$ تتقارب إلى قيمة ما لـ c في $[a, b]$، و $\{f'_n\}$ تتقارب بانتظام على $[a, b]$ إلى دالة ما g. عندئذ فإن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام على $[a, b]$ إلى دالة ما F، حيث F قابلة للتفاضل و $F' = g$.

البرهان:

بما أن f'_n متصلة ومن ثم قابلة للتكامل، تضمن لنا النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل أن:

$$f_n(x) - f_n(c) = \int_x^c f'_n. \tag{2}$$

ووفقاً للنظرية 11.3 فإن $f'_n \Longrightarrow g$ يؤدي إلى أن:

$$\lim_n \left\{ f_n(x) - f_n(c) \right\} = \lim_n \left\{ \int_c^x f'_n \right\} = \int_c^x \lim_n f'_n = \int_c^x g.$$

ووفقاً للفرض، فإن $\left\{f_n(c)\right\}$ تقاربية، ولنقل إنّ $\lim_n f_n(c) = F(c)$، ومن هنا ينتج أن $\left\{f_n(c)\right\}$ تقاربية أيضاً. ولنعرف:

$F(x) = \lim_n f_n(x)$ لكل x في $[a, b]$.

عندئذ تؤدي (2) إلى:

$$F(x) - F(c) = \int_c^x g$$

ومن النظرية 11.1 فإن $g \quad f'_n \Longrightarrow$ تؤدي إلى أن g متصلة ولذا وفقاً للنظرية 7.13 تكون F دالة أصلية (primitive) للدالة g أي أن $F' = g$ على [a, b] . وينبغي أن نبين أن $F \quad f_n \Longrightarrow$ على [a, b] . ولإثبات ذلك نكتب:

$$\begin{aligned}
\left|f_n(x) - F(x)\right| &= \left|\int_c^x f'_n + f_n(c) - \left\{\int_c^x F' + F(c)\right\}\right| \\
&= \left|\int_c^x (f'_n - F') + f_n(c) - F(c)\right| \\
&\leqslant \left|\int_c^x |f'_n - g|\right| + \left|f_n[(c) - F(c)\right| \\
&\leqslant \left\{\operatorname*{lub}_{c \leqslant t \leqslant x} \left|f'_n(t) - g(t)\right|\right\} |x - c| + \left|f_n(c) - F(c)\right|.
\end{aligned}$$

وحيث إن $g \quad f'_n \Longrightarrow$ على [a, b] ، فإذا كان $\varepsilon > 0$ يمكن اختيار N بحيث إن $n > N$ يؤدي إلى:

$$\operatorname*{lub}_{a \leqslant t \leqslant b} \left|f_n(t) - g(t)\right| < \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{b - a},$$

$$\left|f_n(c) - F(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

وبذلك فإن $n > N$ يؤدي إلى:

$$\operatorname*{lub}_{x \in [a,b]} \left|f_n(x) - F(x)\right| < \varepsilon$$

ومن ثم وفقاً للنظرية المساعدة 11.1 تكون:

$$f_n \Longrightarrow F$$

تمارين 11.5

في التمارين 1-3، استعن بالنظرية 11.1 لإثبات أن متتالية الدوال المعطاة لا تتقارب بانتظام على النطاق D.

1 - $f_n(x) = 1 - x^n$ ، $D = [0 ، 1]$.

2 - $f_n(x) = e^{-nx}$ ، $D = [0 ، \infty)$.

3 - $f_n(x) = \tan^n x$ ، $D = \left[0 ، \frac{\pi}{4}\right]$.

في التمارين 4-6، استعن بالنظرية 11.3 لإثبات أن $\{f_n\}$ لا تتقارب بانتظام على D (ان رسم منحني f_n قد يساعد).

4 - $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & ، \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & ، \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \quad ، \quad D = [0, 1].$$

5 - $$f_n(x) = \begin{cases} n & ، \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{n}. \\ 0 & ، \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \quad ، \quad D = [0, 1]$$

6 - $$f_n(x) = \begin{cases} n(1 - nx) & ، \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \\ 0 & ، \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \quad ، \quad D = [0, 1].$$

7 - برهن إذا كان $f_n \Longrightarrow F$ على D و $f_n \Longrightarrow F$ على D' فإن $f_n \Longrightarrow F$ على $D \cup D'$. .

8 - أثبت أنه: إذا كان $f_n \to F$ وكل f_n غير تناقصية، فإن F غير تناقصية.

9 - نفرض أن $f_n \to F$ على D، $\{f_n(x)\}$ غير تناقصية لكل x في D، و $\{f_n\}$ لها متتالية جزئية تتقارب بانتظام على D، أثبت أن $f_n \Longrightarrow F$ على D.

10 ـ نفرض أن $F \Longrightarrow f_n$ على D وكل f_n محدودة على D، وليكن $\underset{x \in D}{\text{lub}} |f_n(x)| \leqslant B_n$. أثبت أنه يوجد حد منتظم B بحيث إنه لكل n من $\mathbb{N}$ ولكل x في D يكون $|f_n(x)| \leqslant B$.

11 ـ أثبت معيار كوشي للتقارب المنتظم: تتقارب متتالية الدوال $\{f_n\}$ بانتظام على D إذا وفقط إذا كان لكل عدد موجب ε يوجد عدد N بحيث يكون لكل x في D

$m > n > N$ تؤدي إلى $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

11.6 نظرية ڤيرشتراس للتقريب

The Weirstrass Approximation Theorem

نقدم في هذا البند واحدةً من أكثر النظريات فائدة ونفعاً في التحليل التطبيقي، وهي نظرية ڤيرشتراس للتقريب. وترتبط هذه النظرية ـ في مفهوم معين ـ بالتقارب المنتظم لمتتاليات كثيرات الحدود (أنظر النتيجة 11.5). وبما أنه يسهل العمل مع كثيرات الحدود، فإن من المرغوب فيه دائماً استبدال دالة ما محل الدراسة ذات صبغة عامة بدالة كثيرة الحدود تعتبر تقريباً جيداً لها. وبذلك فمن المهم معرفة متى يمكن تعيين كثيرة الحدود هذه بحيث تكون قريبة قرباً اختيارياً للدالة المعطاة. والخاصية التي تضمن لنا أن الدالة يمكن تقريبها بهذه الطريقة هي خاصية الاتصال.

نظرية 11.5 : نظرية ڤيرشتراس للتقريب.

إذا كانت الدالة f متصلة على [a, b] و $\varepsilon > 0$ فإنه توجد كثيرة حدود P بحيث إنه لكل x في [a, b] يكون: $|P(x) - f(x)| < \varepsilon.$

البرهان:

نبين أولاً أنه يكفي إثبات النظرية للحالة الخاصة عندما تكون [a, b] ، هي فترة الوحدة [0, 1]. نفترض أن المنطوق صحيح على [0, 1] ، وأن f دالة متصلة على [a, b] . عندئذٍ

فإن الدالـة التراكيبية g المعطاة بـالصيغة $g(x) = f(a + (b - a)x)$ متصلة عـلى $[0, 1]$.
وبالتالي توجد كثيرة الحدود P بحيث إن:

(1) $|g(u) - P(u)| < \varepsilon$ لكل u في $[0, 1]$.

ولأي x في $[a, b]$ نجري التعويض:

$u = \frac{x - a}{b - a}$ ، $g(u) = f\left(a + (b-a)\frac{x - a}{b - a}\right) = f(x)$.

ومنه ينتج أن:

$$\left|f(x) - P\left(\frac{x - a}{b - a}\right)\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

وبما أن $P\left(\frac{x - a}{b - a}\right)$ كثيرة حدود في x فإن النظرية صحيحة في الفترة $[a, b]$.

ولإثبات النظرية في حالة $[a, b] = [0, 1]$، نستعين ببرهان قدمه برنشتين (Bernstein).
ويستخـدم هذا الـبرهان فصلاً (class) خاصـاً من كثـيرات الحـدود تعـرف بكثـيرات حـدود برنشتين. وكثيرة حدود برنشتين النونية للدالة f تعطى بالصيغة:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{3}$$

حيث $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k!(n - k)!)}$. لاحظ أنه إذا حذف العامل $f\left(\frac{k}{n}\right)$

فـإن المجمـوع (3) يصبـح مفكـوك ذات الحـدين للمقـدار $\{x + (1 - x)\}^n = 1$ ،
وللاستفادة من هذه الملاحظة ندرس الدالة ϕ المعطاة بالصيغة:

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x + y)^n, \tag{4}$$

حيث y عدد اختياري (ولكنه مثبت) في $[0,1]$. عندئذٍ فإن:

$$\phi'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1} y^{n-k} = n (x + y)^{n-1},$$

وهكذا إذا ضربنا كل حدود المجموع في $\frac{x}{n}$ سنحصل على:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = x(x + y)^{n-1}. \tag{5}$$

وبتفاضل طرفي (5) نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n} \binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k} = (x+y)^{n-1} + x(n-1)(x+y)^{n-2},$$

وبالضرب مرة أخرى في $\frac{x}{n}$ نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k} = \frac{x}{n}(x+y)^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 (x+y)^{n-2}. \qquad (6)$$

والمعادلات (4)، (5)، (6) صالحة لأي y من [0, 1] ، ولذا فيمكن كحالة خاصة وضع $(1-x)$ بدلاً من y لنحصل على:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} (1-x)^{n-k} = 1, \qquad (7a)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^{k} (1-x)^{n-k} = x, \qquad (7b)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^{k} (1-x)^{n-k} = \frac{x}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2, \qquad (7c)$$

وإذا فكّكنا ذات الحدين $\left[\left(\frac{k}{n} - x\right)\right]^2$ واستخدمنا (7c) و (7b) و (7a) نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{2kx}{n} + x^2\right) \binom{n}{k} x^{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{x}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 - 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 \qquad (8)$$

$$= \frac{x}{n} - \frac{x^2}{n} = \frac{x(1-x)}{n}$$

والآن نفرض أن f متصلة على [0, 1] ، عندئذٍ فإن f منتظمة الاتصال هناك؛ ولذا فإذا كان

$\varepsilon > 0$ فـإنه يـوجد عـدد δ بحيث إنه إذا كـان x, y في $[0, 1]$ فـإن $|x - y| < \delta$ تؤدي إلى:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

نُعرِّف

$$M = 1 + \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

ونختار N بحيث إن:

$$\frac{1}{N^{\frac{1}{4}}} < \delta \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{N}} < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

وإذا ضربنا (7a) في $f(x)$ وطرحنا (3) من الناتج سنحصل على:

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \tag{9}$$

وينقسم الطرف الأيمن من (9) الى مجموعين Σ' و Σ'' ، حيث:

Σ' المجموع على كل k بحيث يكون $\left| \frac{k}{n} - x \right| < \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ ،

و

Σ'' مجموع الحدود الباقية

وفي البداية ندرس Σ': إذا كان $n \geqslant N$ ، $\left| \left(\frac{k}{n}\right) - x \right| < \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$

عندئذ فإن $\left| \left(\frac{k}{n}\right) - x \right| < \delta$ ولذا فإن:

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ولذلك فإن:

$$\left| \Sigma' \right| \leqslant \Sigma' \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| . \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \tag{10}$$

$$< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

وبعد ذلك ندرس Σ'' : إذا كان $\left|\left(\frac{k}{n}\right) - x\right| \geqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ فإن :

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \leqslant \left|\left(\frac{k}{n}\right) - x\right|^2,$$

أو

$$n^{3/2} \leqslant n^2 \left|\left(\frac{k}{n}\right) - x\right|^2 = \left\{n\left[\left(\frac{k}{n}\right) - x\right]\right\}^2 = \{k - nx\}^2.$$

وبذلك فإن :

$$\left|\Sigma''\right| = \left|\Sigma'' \left\{f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leqslant \Sigma'' \left\{\left|f(x)\right| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right\} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant 2M \Sigma'' \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{11}$$

$$\leqslant 2M \Sigma'' \left[\frac{(k-nx)^2}{n^{\frac{3}{2}}}\right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant \frac{2M}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

بالتعويض بـ (8) في (11) نحصل على :

$$\left|\Sigma''\right| \leqslant \frac{2M}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{n} n^2 \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$< \left(\frac{2M}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \frac{n^2 x (1-x)}{n} = \frac{2M}{\sqrt{n}}.$$

وإذا كـان $n \geqslant N > \left(\frac{4M}{\varepsilon}\right)^2$ ، عنـدئـذٍ فـإن $\left|\Sigma''\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. ومن ثم فـإذا كـان $n \geqslant N$ و x أي عدد في $[0, 1]$ فإن :

$$\left|f(x) - B_n(x)\right| < \varepsilon. \tag{12}$$

(لاحظ أن اختيار N لا يعتمد على x، ومن ثم فمتباينة التقريب تتحقق بانتظام داخل $[0, 1]$).

ونظرية ڤيرشتراس للتقريب يمكن صياغتها بدلالة التقارب المنتظم لمتتالية دوال؛ لأن البرهان الذي عرضناه يبين أن $B_n \Longrightarrow f$ على $[0, 1]$. نصيغ النص الشكلي لهذه الملاحظة في النتيجة التالية.

نتيجة 11.5:

إذا كانت الدالة f متصلة على $[a, b]$ فإنه توجد عندئذ متتالية من كثيرات الحدود $\{P_n\}$ تتقارب بانتظام على $[a, b]$ إلى f.

11.6 تمارين

1 - عين كثيرة حدود برنشتين من الدرجة الثالثة B_3 للدالة $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

2 - عين كثيرة حدود برنشتين من الدرجة الرابعة B_4 للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

3 - عين كثيرة حدود $P(x)$ بحيث يكون:

$$\operatorname*{lub}_{x \in [-1,1]} \left|P(x) - |x|\right| < \frac{1}{5}\,.$$

4 - بدراسة الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ على $(0,1)$ يبين أن نظرية ڤيرشتراس للتقريب لا تتحقق إذا أخذنا (a, b) بدلاً من $[a, b]$.

11.7 متسلسلة الدوال

في هذا البند الأخير من هذا الباب ننقل اهتمامنا من مصطلحات متتالية الدوال إلى المتتالية المناظرة للمجاميع الجزئية. ومن المفيد أن نعيد صياغة نتائج البنود 11.1-11.5، في هذه المرة بدلالة المتسلسلات. على سبيل المثال، إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية دوال ولكل x في نطاق ما D

تكون المتتالية العددية $\left\{\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ تقاربية، فإن متسلسلة الدوال Σf_k تسمى تقاربية (نقطياً) على D إلى الدالة $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ، وبالمثل إذا كانت المتتالية $\left\{\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ تقاربية بانتظام على D فإننا نقول عندئذ أن المتسلسلة Σf_k تقاربية بانتظام على D. وبما أن $\sum_{k=0}^{n} f_k$ هي نهاية المتتالية $\left\{\sum_{k=0}^{n} f_k\right\}_{n=0}^{\infty}$ فمن الواضح أن:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k - \sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k>n} f_k.$$

وبذلك يمكننا اعادة صياغة النظرية المساعدة 11.1 بالطريقة التالية:

نظرية مساعدة 11.2:

تكون متسلسلة الدوال Σf_k تقاربية بانتظام على D إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_n \left\{\sup_{x\in D} \left|\sum_{k>n} f_k(x)\right|\right\} = 0.$$

ولكل من النظريات 11.4 و 11.3 و 11.1 المتعلقة بالخواص المنقولة (المُكْتَسبة) نظرية مماثلة لمتسلسلات الدوال. وسنصيغ هذه النظريات بدون برهان؛ لأنه إذا كانت كل من f_k متصلة، أو قابلة للتكامل أو قابلة للتفاضل على الترتيب فإن كل مجموع جزئي $\sum_{k=0}^{n} f_k$ سيكون كذلك. وبالتالي يمكن تطبيق كل نظرية من نظريات الخواص المنقولة (المكتسبة) على متتالية المجاميع الجزئية، وتنتج النتائج مباشرة.

نظرية 11.6:

إذا كانت كل من f_k دالة متصلة على النطاق D و Σf_k تقاربية تقارباً منتظماً على D، فإن $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ متصلة على D.

نظرية 11.7:

إذا كانت كل من f دالة قابلة للتكامل على [a, b] و Σf_k تقاربية تقارباً منتظماً على

$[a, b]$ ، فإن $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ قابلة للتكامل على $[a, b]$ و

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k.$$

نظرية 11.8:

نفرض أن لكل من f_k مشتقة متصلة على $[a, b]$ ، وأن $\Sigma f_k(C)$ تقاربية نحو قيمة ما في c $[a, b]$ وأن $\Sigma f'_k$ تقاربية تقارباً منتظماً على $[a, b]$. عندئذ فإن Σf_k تتقارب بانتظام على $[a, b]$ إلى الدالة القابلة للتفاضل $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ و

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k.$$

والنتيجة التالية تصاغ عادة في صورة المتسلسلات فقط وتعطينا مفاهيم في غاية الأهمية والفائدة لإثبات أن متسلسلة الدوال تقاربية تقارباً منتظماً.

نظرية 11.9 : اختبار M لفيرشتراس (Weierstrass M-test):

نفرض أن Σf_k متسلسلة دوال، وأن ΣM_k متسلسلة عددية موجبة متقاربة بحيث إنه لكل k يكون $\operatorname{lub}_{x\in D} |f_k(x)| \leqslant M_k$ ، عندئذٍ فإن Σf_k تقاربية بانتظام على D.

البرهان:

نفرض $\varepsilon > 0$. بما أن ΣM_k تقاربية فإنه يوجد عدد N بحيث إن $n > N$ يؤدي إلى:

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} M_k - \sum_{k=0}^{n} M_k\Big| = \Big|\sum_{k>n} M_k\Big| < \varepsilon.$$

ولكن

$$\operatorname{lub}_{x\in D} \Big|\Big|\sum_{k>n} f_k(x)\Big| \leqslant \operatorname{lub}_{x\in D} \sum_{k>n} |f_k(x)|$$

$$\leqslant \Big|\sum_{k>n} \operatorname{lub}_{x\in D} |f_k(x)| \leqslant \Big|\sum_{k>n} M_k,$$

وبذلك فإن $n > N$ تؤدي إلى $\Big|\sum_{k>n} f_k(x)\Big| < \varepsilon$ $\operatorname{lub}_{x\in D}$ ومن ثم فإن:

$$\lim_n \Big\{\operatorname{lub}_{x\in D} \Big|\Big|\sum_{k>n} f_k(x)\Big| \Big\} = 0,$$

ولذا فإن $\sum f_k$ تقاربية بانتظام على D.

والبرهان السابق يثبت نصاً أقوى مما هو معطى في النظرية 11.9. فعند الفحص الدقيق نرى أننا قد أثبتنا أن المتسلسلة $\sum|f_k|$ تقاربية تقارباً منتظماً على D، ويؤدي هذا ليس فقط إلى أن $\sum f_k$ تقاربية تقارباً منتظماً ـ وهو نتيجة النظرية 11.9 ـ ولكن أيضاً إلى أن $\sum|f_k|$ تقاربية نقطياً على D. ومن هنا يبرز سؤال طبيعي وهو: هل يمكن لمتسلسلة الدوال $\sum f_k$ أن تتقارب بانتظام على نطاق ما D وأيضاً تتقارب مطلقاً في كل نقطة من D في حين لا تكون المتسلسلة المطلقة $\sum|f_k|$ منتظمة التقارب؟ والإجابة هي نعم، ويوضح المثال التالي هذه الحقيقة، وهو يبين أيضاً أن متسلسلة الدوال يمكن أن تتقارب بانتظام حتى لو كان اختبار ـ M لفيرشتراس غير قابل للتطبيق عليها.

مثال 11.11:

إذا كان:

$$f_{2k}(x) - f_{2k+1}(x) = x^k - x^{k+1}$$

لقيم $k \geqslant 0$، عندئذٍ فإن $\sum f_k$ تقاربية بانتظام على $[0, 1]$ إلى الدالة المساوية للصفر بالتطابق Φ. وأيضاً $\sum|f_k(x)|$ تتقارب لكل x في $[0, 1]$، ولكن $\sum|f_k|$ لا تتقارب بانتظام في $[0, 1]$. وفي البداية ندرس هذه المتسلسلة:

$$\sum f_k(x) = (1-x) - (1-x) + (x-x^2) - (x-x^2)$$

$$+ \ldots + (x^k - x^{k-1}) - (x^k - x^{k+1}) + \ldots$$

ولإثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum f_k$ نلاحظ أنه لكل n يكون: $\sum_{k=0}^{2n+1} f_k(x) = 0$

و $\sum_{k=0}^{2n} f_k(x) = f_{2n}(x) = x^n - x^{n+1} = x^n(1-x).$

ويمكننا إيجاد $\max_{x\in[0,1]} \left|\sum_{k=0}^{2n} f_k(x)\right|$ بالاستعانة بحسابات أولية

$$f'_{2n}(x) = 2\left\{nx^{n-1} - [n+1]\,x^n\right\} = 2x^{n-1}\left(n - [n+1]\,x\right).$$

وبذلك فإن:

$$\max_{x\in[0,1]} |f_{2n}(x)| = f_{2n}\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant 2\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

وحيث $\lim_n \frac{1}{(n+1)} = 0$ فإنه ينتج:

$\lim_n \left\{\max_{x\in[0,1]} f_{2n}(x)\right\} = 0$. ولـذا فمن النظريـة المساعـدة 11.2 تكـون Σf_k تقـاربيـة بانتظام على $[0, 1]$.

إن اختبار $\Sigma |f_k|$ يُعتبر أسهل. تختصر المجاميع الجزئية فتؤول إلى:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} |f_k(x)| = (1-x) + (1-x) + (x-x^2) + (x-x^2) + \ldots + (x^{n-1}-x^n)$$

$$= 2(1-x) + 2(x-x^2) + \ldots + 2(x^{n-1}-x^n)$$

$$= 2(1-x^n).$$

وبذلك فإن:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| = \begin{cases} 2, & x \in [0, 1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

(ولا ينبغي أن نأخذ في اعتبارنا المجاميع الجزئية الأخرى $\sum_{k=0}^{2n} |f_k|$ ؛ لأن:

$$\lim_n \left\{\sum_{k=0}^{2n} |f_k(x)| - \sum_{k=0}^{2n-1} |f_k(x)|\right\} = \lim_n |f_{2n}(x)| = 0).$$

وبما ان كل من f_k متصلة على $[0, 1]$ ونهاية الـدالة غـير متصلة هناك، نستنتـج من النظريـة 11.6 أن $\Sigma |f_k|$ لا تتقارب بانتظام على $[0, 1]$.

ونبدي ملاحظة وهي أن الاختبار ـ M لا يمكن تطبيقه على متسلسلة المثال 11.11، وهو بالفعل كذلك؛ لأن الاختبار ـ M كان سيؤدي إلى أن $\Sigma\, |f_k|$ تقاربية بانتظام. ولكي نرى بوضوح لماذا يفشل الاختبار ـ M نلاحظ أن M_{2n} كان يجب أن تكون كبيرة على الأقل مثل:

$$\max_{x\in[0,1]} |f_{2n}(x)| = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right). \qquad (1)$$

ولكن المتسلسلة

$$\Sigma\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

تباعدية؛ لأنها تهيمن على $\frac{1}{n+1}$. وللتحقق من هذه الهيمنة يجب أن نوضح أن $\left[\frac{n}{n+1}\right]^n$ محدودة بعيدة عن الصفر. ويمكن توضيح ذلك بالاستعانة بقاعدة هوبيتال لحساب النهاية:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \frac{1}{e}. \qquad (2)$$

وفي تمرين 11.7.1 يطلب إجراء تفصيلات هذه العمليات.

تمارين 11.7

1 ـ أثبت التأكيد في الفقرة الواردة في نهاية المثال 11.11 أي تحقق من صحة المعادلتين (2) و (1).

2 ـ أثبت أنه إذا كانت Σf_k تقاربية على D، فإن $\lim_k f_k = \Phi$ (صفراً بالتطابق) على D.

في تمارين 3-9، أثبت أن $\Sigma\, f_k$ تقاربية بانتظام على النطاق D:

3 ـ $f_k(x) = \dfrac{\sin kx}{k^2}$ ، $D = \mathbb{R}$.

4 ـ $f_k(x) = x^k$ ، $D = \left[-\frac{1}{2} ، \frac{1}{2}\right]$

$$f_k(x) = \left(\tan \frac{x}{2}\right)^k, \quad D = \left[0 ، \frac{\pi}{4}\right].$$ - 5

$$f_k(x) = \frac{\sin kx + \cos kx}{k(\log k)^2}, \quad D = \mathbb{R}.$$ - 6

$$f_k(x) = kx^k, \quad D = \left[-\frac{1}{2} ، \frac{1}{2}\right].$$ - 7

$$f_k(x) = \left(\frac{3}{2} \sin x\right)^k, \quad D = \left[-\frac{\pi}{6} ، \frac{\pi}{6}\right].$$ - 8

$$f_k(x) = \frac{k+1}{k} e^{-kx}, \quad D = [1 ، \infty).$$ - 9

الفصل الثاني عشر

12

متسلسلات القوى Power Series

12.1 تقارب متسلسلات القوى

ربما يكون فصل (class) الدوال الذي يتكون من قوى (powers) الدالة المحايدة من أكثر فصول الدوال أولية، على سبيل المثال $f(x) = x^n$. هذا الفصل من الدوال يركب حسابياً ليكوّن الدوال كثيرات الحدود والدوال القياسية: وقد استعملت هذه الدوال بنجاح لتكوين متسلسلة الدوال التي تكوّن نظرية غنية، والتي تستخدم في كثير من التطبيقات. في التعريفات التالية وخلال هذا الباب، فإنّ المتسلسلة التي سندرسها يكون حدها الابتدائي هو الحد المرقم بالصفر. إذن $\{a_k\}$ تعني باختصار أن $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

تعريف 12.1:

إذا كانت $\{a_k\}$ متتالية عددية و a عدداً، ولنفرض أن f_k هي الدالة المعطاة بالصيغة $f(x) = a_k (x - a)^k$ ، فإن متسلسلة الدوال Σf_k تسمى بمتسلسلة القوى. إذا كان x_1 عدداً بحيث تكون $\Sigma a_k(x_1 - a)^k$ تقاربية، فإننا نقول: بأن متسلسلة القوى $\Sigma a_k(x_1 - a)^k$ تقاربية عند x_1. الجملة «غير تقاربية عند x_1» تستعمل بالمثل.

نبدأ بإثبات بعض الحقائق حول فئة الأعداد حيث تكون متسلسلة القوى تقاربية عندها.

نظرية مساعدة 12.1:

إذا كانت متسلسلة القوى $\Sigma a_k(x_1 - a)^k$ تقاربية عند x_1 وكان x_2 عدداً يحقق

$|x_1 - a| > |x_2 - a|$ فإن $\Sigma a_k (x_1 - a)^k$ تقاربية عند x_2.

البرهان:

إذا كان $x_1 = a$ فإنه لا يوجد أي شيء للبرهنة، ولهذا نفترض أن $x_1 \neq a$ ونفترض أن x_2 هو العدد الذي يحقق $|x_1 - a| > |x_2 - a|$. نعرّف:

$$r = \frac{|x_2 - a|}{|x_1 - a|} .$$

بما أن $\Sigma a_k (x_1 - a)^k$ تقاربية، فنعرف أن: $\lim_k a_k (x_1 - a)^k = 0;$

وبذلك تكون المتتالية $\{a_k (x_1 - a)^k\}$ محددة، لنقل إن:

$$B = \text{lub}_k \left\{ \left| a_k (x_1 - a)^k \right| \right\}.$$

إذن فلكل k يكون:

$$\left|a_k (x_2 - a)^k\right| = |a_k| \, |x_1 - a|^k \left| \frac{x_2 - a}{x_1 - a} \right|^k \leqslant Br^k.$$

لهذا السبب فإن $\Sigma a_k (x_2 - a)^k$ مُهَيْمن عليها بالمتسلسلة الهندسية التقاربية Σr^k وإذن فإن: $\Sigma a_k (x_2 - a)^k$ تكون تقاربية أيضاً.

في بعض الأحيان تستخدم النظرية المساعدة 12.1 على شكل نفي، أي إذا كان $|x_1 - a| > |x_2 - a|$ و $\Sigma a_k (x - a)^k$ غير تقاربية عند x_2 فإن متسلسلة القوى هذه تكون غير تقاربية عند x_1 أيضاً.

لاحظ أن النظرية المساعدة 12.1 اشترطت المتباينة الصارمة بين $|x_2 - a|$، $|x_1 - a|$. ليس من الضروري أن تكون النتيجة صحيحة عند كل x_2 بحيث يكون $|x_1 - a| \geqslant |x_2 - a|$. المثال التالي يوضح هذا الاحتمال.

مثال 12.1:

تكون متسلسلة القوى $\Sigma \left(\frac{x^k}{k} \right)$ تقاربية إذا وفقط إذا كان $-1 \leqslant x < 1$. هذا واضح من استعمال اختبار المقارنة ونظرية المتسلسلة المتعاقبة. ولكن إذا أخذنا $x_1 = -1$

فإنه غير صحيح أن $\sum\left(\frac{x^k}{k}\right)$ تقاربية عند كل x_2 حيث $|x_2| \leqslant |x_1| = |-1|$ ؛ لأنه عندما $x_2 = 1$ فإن متسلسلة القوى هذه تباعدية.

بمساعدة النظرية المساعدة 12.1 نستطيع أن نصف فئة كل الأعداد x التي تكون عندها متسلسلة القوى $\sum a_k (x-a)^k$ تقاربية. تخبرنا النظرية التالية بأن هذه الفئة إما أن تكون خط الأعداد $\mathbb{R}$ كله أو فترة مركزها a. إذن هذه الفئة تسمى فترة التقارب لمتسلسلة القوى. العدد R في هذه النظرية يسمى نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى.

نظرية 12.1:

لنفرض أن I هي الفئة $\{x_1 \in \mathbb{R} : \sum a_k (x_1 - a)^k \text{ تقاربية}\}$ ، فإن I اما أن تكون $\mathbb{R}$ أو فترة على شكل:

$[a-R ، a+R]$ ، $[a-R ، a+R)$ ، $(a-R ، a+R]$ أو $(a-R ، a+R)$.

البرهان:

إذا كان $I \neq \mathbb{R}$ فإن النظرية المساعدة 12.1 تؤكد لنا أن I فترة محدودة، لهذا السبب فإننا نفرض أن $R = \text{lub}\,\{|x_1 - a| : x_1 \in I\}$. إذا كان x_2 في $(a-R ، a+R)$ ، فإن $|x_2 - a| < R$ ويوجد x_1 في I حيث تكون $|x_2 - a| < |x_1 - a|$. لذا تؤكد النظرية المساعدة 12.1 أن $\sum a_k (x_2 - a)^k$ تقاربية ولهذا فإن x_2 في I. هذا يبرهن أن $(a-R ، a+R) \subseteq I$. الآن لنفرض أن x_1 في I. ان اختيارنا للعدد R يؤدي إلى أن $|x_1 - a| \leqslant R$ ، ولهذا السبب فإن x_1 في $[a-R ، a+R]$. إذن $(a-R ، a+R) \subseteq I \subseteq [a-R ، a+R]$ ونستنتج من ذلك أنّ I لا بد أن تكون واحدة من الفترات الأربع المتمركزة حول a.

قد نتذكر من مبادىء التفاضل والتكامل أنه بالإمكان تعيين فترة التقارب بطرق أسهل نسبياً. أول شيء يجب عمله هو إيجاد نصف قطر التقارب، والنظرية التالية تعطي طريقة مبسطة لحل المسألة. وبالرغم من أن هذه النظرية لا تعطي جواباً لكل متسلسلات القوى، ولكنها نظرية نافعة جداً.

نظرية 12.2 :

إذا كانت $\{a_k\}$ متتالية عددية بحيث يكون :

$$\lim_k \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = R,$$

و a أي عدد، فإن R هو نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى $\sum a_k (k-a)^k$.

البرهان:

نطبق اختبار النسبة (Ratio test) لمتسلسلة القوى $\sum a_k (k-a)^k$ فنحصل على:

$$\lim_k \left| \frac{a_{k+1} (x-a)^{k+1}}{a_k (x-a)^k} \right| = \lim_k \left| \frac{a_{k+1}}{} \right| |x-a| = \frac{1}{R} |x-a|.$$

باستخدام اختبار النسبة تكون المتسلسلة تقاربية تقارباً مطلقاً إذا كانت قيمة النهاية $\frac{|x-a|}{R}$ أقل من 1، والتي تكافىء $|x-a| < R$. وبالمثل فإن اختبار النسبة يتضمن أن المتسلسلة غير تقاربية إذا كان $|x-a| > R$. لهذا السبب فإن العدد R هو نصف قطر التقارب.

من المفروض أن نلاحظ إمكانية تفسير نصف قطر التقارب R في النظرية 12.2 بالمعنى المعمم؛ أي أنه إذا كان $\lim_k \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \infty$ ، فإن فترة التقارب هي $\mathbb{R}$. أيضاً إذا كان $\lim_k \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 0$ فإن فترة التقارب هي $[a, a]$ أي أنّها تتكون من النقطة الوحيدة a.

لإيجاد فترة التقارب لمتسلسلة قوى معينة، لا بدّ أولاً أن نطبق النظرية 12.2 أو احدى تنوعاتها (انظر التمرين 12.3) لإيجاد R. ثم نتحقق من نقطتي النهاية $x = a + R$ ، $x = a - R$ لتحديد أي فترة مرغوبة من الفترات الأربع المحتملة. بما أن هذا التمرين العادي يعتبر بسيطاً، فلنراجعه هنا باختصار باعطاء مثالين.

مثـــال 12.2 :

إنّ فترة التقارب للمتلسلة $\sum \frac{(x-5)^k}{k+1}$ هي $[4, 6)$.

أولاً :

$$R = \lim_k \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_k \frac{k+2}{k+1} = 1.$$

عندما $x = 6$ فإن متسلسلة القوى تصبح $\sum \left(\frac{1}{k+1} \right)$ وهي تباعدية، وعندما $x = 4$ فإن المتسلسلة تصبح $\sum \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right)$ وهي تقاربية.

مثـــال 12.3 :

إن فــترة التقـارب للمتسلسلة $\sum \left(\frac{2x^{2k}}{(k+1)^2} \right)$ هي $[-\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}}]$ ؛ لأن $a_{2k+1} = 0$ ، ولا نستطيع استخدام اختبار النسبة حتى نستعمل النظرية 12.2 مباشرة.

ولكن نستطيع أن نعامل هذه المتسلسلة على أنها متسلسلة قوى للمتغير x^2. إذن فمعامل القوة k للمتغير x^2 هو $b_k = 2^k (k+1)^{-2}$.

بتطبيق النظرية 12.2 لمتاليات المعاملات $\{b_k\}$ نحصل على :

$$\lim_k \frac{b_k}{b_{k+1}} = \lim_k \frac{2^k (k+1)^{-2}}{2^{k+1} (k+2)^{-2}}$$

$$= \lim_k \frac{1}{2} \left(\frac{k+2}{k+1} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

لهذا السبب فإن المسلسلة متقاربة عندما يكون $|x^2 - 0| < \frac{1}{2}$ ، وهو ما يكافىء $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. عند نقطتي نهاية الفترة نحصل على :

$$\sum \frac{1}{(k+1)^2} = \sum \frac{2^k \left(\frac{1}{2} \right)^k}{(k+1)^2} = \sum \frac{2^k \left(\pm \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^{2k}}{(k+1)^2}$$ وهي تقاربية.

تمارين 12.1

أوجد فترة التقارب لكل من متسلسلات القوى التالية:

1 - $\sum \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right) (x+2)^4$

2 - $\sum \left(\frac{(-2)^{k+1}}{k+1} \right) (x-1)^4$

3 - $1 - \left(\frac{1}{2} \right) x + \left(\frac{1.3}{2.4} \right) x^2 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right) x^3 + \dots$

4 - $\sum \frac{x^{2k}}{k!}$

2 - $\sum \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)} \right) x^{2k+1}$

6 - $\sum \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right) (x+1)^k$

7 - $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{2^3} + \frac{x^5}{3^3} + \frac{x^6}{2^4} + \frac{x^7}{3^4} \dots$

8 - $\sum \left(\frac{1}{k} \right) (x+2)^{2k+1}$

9 - $x + 1^2 x^2 + \sqrt{1}\, x^3 + 2^2 x^4 + \sqrt{2}\, x^5 + 3^2 x^6 + \sqrt{3}\, x^7 \dots$

10 - $\sum \frac{k!}{k^k} x^k$ (المتسلسلة تبدأ عندما $k = 1$).

11 - $\sum (\log k)^k x^k$ (المتسلسلة تبدأ عندما $k = 1$. إرشاد: قارن هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $\sum R^k x^k$).

12 - $\sum k^{\log (k)} x^k$ (تبدأ بالمتسلسلة عندما $k = 1$. إرشاد: $k^{\log k} = e^{(\log k)^2}$ و $\lim_{\infty} \left\{ [\log x]^2 - [\log (x+1)]^2 \right\}$ بالإمكان إيجاده باستخدام قانون القيمة الوسطى).

12.2 تكامل وتفاضل متسلسلات القوى

(Integration and Differentiation of Power Series)

في فترة التقارب، يُحدِّد مجموع متسلسلة القوى دالة f معطاة كالآتي:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k.$$

بما أن هذه الدالة هي نهاية لمتتالية دوال كثيرة الحدود، فمن المعقول توقُّع اكتساب f بعض الخواص الايجابية عن الدوال كثيرة الحدود مثل الاتصال، والقابلية للتكامل، والقابلية للتفاضل. في الحقيقة إن كل من هذه الخواص يَصُّح داخل فترة التقارب. هذه هي نتائج التقارب المنتظم الذي سيعرض هنا، وهذا التقارب المنتظم هو موضوع النظرية التالية.

نظرية 12.3:

إذا كان لمتسلسلة القوى $\Sigma a_k (x-a)^k$ نصف قطر تقارب R، فإنها تتقارب بانتظام على كل فترة جزئية مغلقة من: $(a-R ، a+R)$.

البرهان:

لنفرض أن $(a-R ، a+R) \supset [c-d]$. أن $\Sigma a_k (x-a)^k$ تقاربية عند c و d. إذا كان $|c-a| \leqslant |d-a|$ فإننا نعرّف $M_k = |a_k (d-a)^k|$. وإذا كان $|c-a| \geqslant |d-a|$ فإننا نعرّف $M_k = |a_k (c-a)^k|$. في كلا الحالتين تكون ΣM_k تقاربية و $\underset{x \in [c,d]}{\text{lub}} |a_k (x-a)^k| \leqslant M_k$. إذن اختبار ـ M لفيرشتراس يطبق ليعطي التأكيد على التقارب المنتظم.

لاحظ أن النظرية 12.3 والتي تعطي نتيجة حول الفترة التي يتم فيها التقارب المنتظم لا تحوي نقطتي نهاية فترة التقارب. هذه ليست أحسن نتيجة محتملة على سبيل المثال، فإن العالم آبل برهن على أنه إذا كانت Σa_k تقاربية فإن $\Sigma a_k x^k$ تقاربية بانتظام على [0, 1]، ولكن باستخدام النظرية 12.3 نستطيع بسهولة أن نبرهن أن مجموع متسلسلة القوى هو دالة قابلة للتكامل.

نظرية 12.4:

لنفرض أن $\sum a_k (x-a)^k$ ذات نصف قطر تقارب R وأن $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ عندما يكون x في $(a - R ، a + R)$. إذا كانت $[c, d] \subseteq (a - R ، a + R)$ ، فإن f قابلة للتكامل على $[c, d]$ والتكامل حداً بحد يكون صحيحاً.

$$\int_c^d \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_c^d (x-a)^k \, dx. \tag{1}$$

البرهان:

هذه النتيجة هي نتيجة مباشرة من النظرية 11.7 والنظرية 12.3.

يمكن استخدام طريقة التكامل حداً بحد لحساب بعض المجاميع المهمة، وهذا ما نوضحه في المثال التالي.

مثال 12.4:

أحسب $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k\,2^k} \right)$. نبدأ بالمتسلسلة الهندسية المعروفة

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{if } -1 < x < 1. \tag{2}$$

باستخدام النظرية 12.4 يمكن إجراء تكاملها حداً بحد.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\log|1-x| \qquad \text{if } -1 < x < 1. \tag{3}$$

بما أن هذا صحيح لكل x في $(-1, 1)$ يمكننا التعويض عن x بالعدد $\frac{1}{2}$ في (3) ونحصل على:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} = -\log\left(\frac{1}{2}\right).$$

بوضع j بدلاً من $k+1$ نستنتج:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j\,2^j} = \log 2,$$

من الواضح أن هذا يكافيء المجموع المطلوب.

في المثال التالي نقوم ببحث قابلية متسلسلة القوى للتفاضل. لكي نستعمل النظرية 11.8 نحتاج إلى معرفة ما إذا كانت متسلسلة المشتقات تقاربية بانتظام أم لا. ولهذا الغرض لا بد أن نبرهن نتيجة أولية تقارن بين متسلسلة القوى ومتسلسلة مشتقاتها.

نظرية مساعدة 12.2:

لأي متتالية $\{a_k\}$ ولأي عدد a، متسلسلتا القوى $\sum a_k (x-a)^k$ و $\sum ka_k (a-k)^{k-1}$ لهما نصف قطر التقارب نفسه.

البرهان:

لنفرض أن R، R' هما نصفي قطر التقارب للمتسلسلة $\sum a_k (x-a)^k$ والمتسلسلة $\sum ka_k (x-a)^{k-1}$ على التوالي. إذا كان $|x_1 - a| < R'$ فإن $\sum ka_k (x-a)^{k-1}$ تقاربية تقارباً مطلقاً، إذن فإن

$$\sum a_k (x_1 - a)^k = (x_1 - a) \sum a_k (x_1 - a)^{k-1}$$

أيضاً تقاربية تقارباً مطلقاً؛ لأن المتسلسلة اليمنى مهيمن عليها بالمتسلسلة $\sum ka_k (x-a)^{k-1}$. بما أن $\sum a_k (x_1 - a)^k$ تقاربية و $|x_1 - a| \leqslant 4\ R$ فإن $R' \leqslant R$.

لتوضيع أن $R' \leqslant R$، نفترض أن $\sum a_k (x_1 - a)^k$ تقاربية تقارباً مطلقاً ونستنتج أن $\sum ka_k (x_2 - a)^{k-1}$ متقاربة مطلقاً لكل x_2 يحقق $|x_2 - a| < |x_1 - a|$. لندرس الآتي:

$$\left| \frac{ka_k (x_2 - a)^{k-1}}{a_k (x_1 - a)^k} \right| = k \left| \frac{x_2 - a}{x_1 - a} \right|^{k-1} \frac{1}{|x_1 - a|} = \frac{1}{|x_1 - a|} kr^{k-1},$$

عندما يكون:

$$r = \frac{|x_2 - a|}{|x_1 - a|} < 1.$$

بما أن $\lim_k kr^{k-1} = 0$ (لماذا؟)، نرى أن $\sum \left|ka_k (x_2 - a)^{k-1}\right|$ مهيمن عليها

بـالمتسلسلة $\Sigma \left|a_k (x_1 - a)^k\right|$. لهـذا السبب فـإن المتسلسلة الأولى تتقـارب مـطلقـاً كلما كانت المتسلسلة الأخيرة تقاربية تقارباً مـطلقاً، أي أن $R \leqslant R'$. هـذا يكمل الـبرهان بـأن $R = R'$.

لاحظ أننـا لم نبرهن بـأن متسلسلة القوى ومتسلسلة مشتقـاتها لهـا بالضبط فـترة التقارب نفسها. نستطيع أن نستنتج أن لهـما نصف قطر التقـارب نفسه، ولكن سلوك كـل منهما عنـد نقطتي نهاية الفترة قد يختلف.

مثـال 12.5:

المتسلسلة $\Sigma \left(\frac{x^k}{k^2} \right)$ والمتسلسلة $\Sigma \left(\frac{x^{k-1}}{k} \right)$ لهـما نصف قـطر التقـارب نفسـه $R = 1$ ، ولكن الأولى تتقارب على $[-1, 1]$ بينما الثانية تقاربية فقط على $[-1, 1)$.

الآن نستطيع برهان أن متسلسلة القوى دالة قابلة للتفاضل.

نظرية 12.5:

لنفرض أن $\Sigma a_k (x - a)^k$ ذات نصف قطر تقـارب R و $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k$ لكـل x في $(a - R ، a + R)$. إذاً f قابلة للتفـاضل هنـاك كما أن التفـاضل حـداً بحـد صحيح:

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k\right]' = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k (x - a)^k\right]'$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x - a)^{k-1}. \qquad (4)$$

البرهان:

النظرية 12.3 والنظرية المسـاعدة 12.2 يؤديـان إلى أنه عـلى كل فـترة جزئيـة مغلقة للفـترة $(a - R ، a + R)$ ، تكـون المتسلسلة $\Sigma k a_k (x - a)^{k-1}$ تقاربيـة بانتـظام. أيضاً من الواضح أن كل حد من $\Sigma a_k (x - a)^k$ قابل للتفاضل، والمسلسلة تقاربية عند كل نقطة

من $(a - R ، a + R)$. إذن تتحقق فروض النظرية 11.8 على كل فترة جزئية مغلقة من الفترة $(a - R ، a + R)$. لهذا السبب نستنتج أن مشتقة المجموع يساوي مجموع المشتقات. بما أن الاستنتاج صحيح على كل فترة جزئية مغلقة من الفترة $(a - R ، a + R)$ وأن كل x في $(a - R ، a + R)$ يقع في فترة جزئية مغلقة من $(a - R ، a + R)$ ، نستنتج أن (4) تصح على كل $(a - R ، a + R)$.

نتيجة 12.5 :

إذا كانت:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k$$

لكل x في $(a - R ، a + R)$ ، فإن f متصلة هناك.

البرهان :

هذا البرهان نتيجة مباشرة من النظرية 12.5. من الممكن أيضاً برهنة هذه النتيجة مباشرة من النظرية 12.3 (انظر التمرين 12.2.7).

كما في النظرية 12.4، نستطيع استعمال النظرية 12.5 لحساب مجموع بعض أنواع معينة من المتسلسلات التي لها علاقة بتسلسلات معروفة.

مثال 12.6 :

أحسب $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2^k} \right)$. نبدأ بالمتسلسلة الهندسية

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x} \qquad \text{if } -1 < x < 1,$$

نأخذ التفاضل حداً بحد

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1 - x)^2} \ ,$$

ونضرب الطرفين في x:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} . \qquad (5)$$

بما أن (5) صحيح لكل x في $(-1, 1)$، نستطيع أن نعطي $x = \frac{1}{2}$ ، لنحصل على

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2^k} \right) = 2.$$

تمارين 12.2

1 ـ أحسب المجموع $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k$.

2 ـ أحسب المجموع $1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + \ldots$

3 ـ احسب المجموع $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

4 ـ برهن على أن:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{(2k+1)} \right] = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

(إرشاد: $\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{(1+x^2)}$).

5 ـ برهن على أن:

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

(مساعدة: $\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{(1+x)}$).

6 ـ برهن أنه إذا كانت g دالة قياسية على $\mathbb{N}$ ، فإن المتسلسلة $\sum a_k (x-a)^k$ والمسلسلة $\sum a_k\, g(k)\, (x-a)^k$ لهما نصف قطر التقارب نفسه.

7 ـ أعط برهاناً مباشراً للنتيجة 12.5 وذلك باستعمال النظرية 12.3 وليس باستعمال النظرية 12.5.

12.3 متسلسلة تايلور Taylor Series

موضوع هذا البند مألوف أيضاً لدى الطالب منذ دراسة مبادىء التفاضل والتكامل. وتختلف المعالجة هنا عن المعالجة التي درسها الطالب في مبادىء التفاضل والتكامل؛ لأن اهتمامنا الأول هو قضايا التقارب وخواص نهاية الدوال فضلاً عن تمثيل دالة معينة بمتسلسلة تايلور. أولاً نأخذ بعض الملاحظات عن النظرية 12.2 والتي تسمح لنا بتعميم استنتاجاتها.

نظرية 12.6:

لنفرض أن $\sum a_k (x-a)^k$ لها نصف قطر تقارب $R > 0$ و $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ لكل x في $(a-R ، a+R)$ ، فإن f لها مشتقات من كل الرتب داخل $(a-R ، a+R)$ ولكل k

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}; \tag{1}$$

لهذا السبب فإن لكل x في $(a-R ، a+R)$ يكون:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \tag{2}$$

البرهان:

بما أن النظرية المساعدة 12.2 تضمن ثبات وعدم تغيُّر نصف قطر التقارب لمتسلسلة المشتقات، نرى أنها أيضاً تتقارب لدالة قابلة للتفاضل على $(a-R ، a+R)$. ولهذا السبب فإن متسلسلة المشتقات أيضاً يمكن تفاضلها حداً بحد لتعطي:

$$g''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-a)^{k-2}$$

إذا كان $x \in (a-R ، a+R)$.

يمكن تفاضل متسلسلة القوى هذه حداً بحد أيضاً وبتكرار هذه العملية نحصل على:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)\, a_k (x-a)^{k-n}. \qquad (3)$$

هذه الصيغة صحيحة في كل $(a-R ، a+R)$ ، وبالخصوص عندما $x = a$ ، المتسلسلة (3) ذات حد واحد غير صفري وهو $(k = n)$:

$$f^{(n)}(a) = n!\, a_n$$

لهذا السبب فإن المعادلتين (1) و (2) صحيحتان والنظرية قد برهنت.

الرمز $C^{(n)}(I)$ يستعمل للدلالة على تجمع كل الدوال التي لها مشتقة نونية متصلة على الفترة I.

يُقال للدالة التي لها مشتقات من كل الرتب على الفترة I بأنها تنتمي إلى الفصل (class) $C^{\infty}(I)$. هذا الرمز يقرأ «C ما لانهاية على I». لأي عنصر من $C^{\infty}(a-R ، a+R)$ ، نستطيع أن نحدد المعاملات $\{a_k\}$ من (1) وتكوين متسلسلة القوى التي مركزها a. هذا النوع من متسلسلة القوى يسمى متسلسلة تايلور للدالة f حول a. في الحالة الخاصة $a = 0$ ، فإنّ متسلسلة القوى $\sum \left[\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right] x^k$ تسمى متسلسلة ماكلورين Maclaurin series للدالة f.

من المهم ملاحظة أنّنا لم نقل أن المعادلة (2) صحيحة عندما تكون f في $C^{\infty}(a-R ، a+R)$. وقد أثبتنا وجود متسلسلة تايلور للدالة f حول a، لكن لم نبرهن تقارب هذه المتسلسلة (إلا عند a حيث التقارب تافه) ولا نستطيع قول أي شيء مقنع حول مجموع متسلسلة تايلور حتى لو عرفنا أنها تقاربية (انظر تمرين 12.7).

إذا كانت f تساوي مجموع متسلسلة قوى خلال فترة $(a-R ، a+R)$ حيث $R > 0$ فإن f تسمى دالة تحليليّة (analytic) في $(a-R ، a+R)$. هذا هو فصل الدوال التي تحقق فروض النظرية 12.6. نستنتج من هذه النظرية أن معاملات متسلسلة القوى لا بد أن تعطى بالمعادلة (1) والمعادلة (2) صحيحة لكل x في $(a-R ، a+R)$.

بهذا نكون قد برهنا أن متسلسلة تايلور للدالة f حول a هي المتسلسلة الوحيدة والتي

يساوي مجموعها $f(x)$ خلال الفترة المفتوحة والمتمركزة حول a. تعرض هذه المعلومات في المفترض التالي.

مفترض 12.1:

إذا كانت f دالة تحليلية على $(a-R ، a+R)$ ، حيث $R > 0$ ، فإن متسلسلة القوى ذات المجموع f لا بد وأن تكون متسلسلة تايلور للدالة f حول a.

الآن ندرس العلاقة العكسية ونوضّح بمثال أن الدالة يمكن أن تكون في $C^{\infty}(\mathbb{R})$ من دون أن تكون تحليلية.

مثـال 12.7:

إذا كانت الدالة f معطاة كالآتي:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} , & \text{if } x \neq r, \\ 0 , & \text{if } \quad x = 0, \end{cases}$$

فإن f في $C^{\infty}(R)$ ولكن f لا تساوي متسلسلة ماكلورين لهذه الدالة. ان قابلية الدالة f للتفاضل واضحة عند كل قيم x ما عدا الصفر. نؤكد أن لكل k الدالة $f^{(k)}(0) = 0$ وهو ما يتضمّن أن معاملات متسلسلة ماكلورين مطابقة للصفر. بالرغم من ذلك فإن هذه المسلسلة بالتأكيد متقاربة (إلى الدالة الصفرية)، ومجموعها لا يساوي f.

لتُبيِّن أن $f^{(k)}(0) = 0$ ، أولاً نستخدم قاعدة هوبيتال عدة مرات لإجراء الحسابات التالية:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = \lim_0 \frac{x^{-k}}{e^{1/x^2}} = \lim_0 \frac{kx^{-k-1}}{2x^{-3}\, e^{1/x^2}} \tag{4}$$

$$= \lim_0 \frac{kx^{-k+2}}{2e^{1/x^2}} = \ldots = \lim_0 \frac{kx^i}{e^{1/x^2}} ,$$

عندما $i = 0$ أو 1 و k ثابت فإن:

$$\lim_0 \frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = 0 \quad , \text{لكل } k \text{ في } \mathbb{N}$$

إذن فإن :

$$f'(0) = \lim_0 \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_0 \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0. \qquad (5)$$

للمشتقة من الرتبة k، يكون

$$f^{(k)}(0) = \lim_0 \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x} \qquad (6)$$

لبرهنة هذا التأكيد بواسطة الاستقراء الرياضي، يمكن أن نفرض أن $f^{(k-1)}(0) = 0$ وهو يسمح لنا بكتابة (6) على شكل:

$$f^{(k)}(0) = \lim_0 \frac{f^{(k-1)}(x)}{x} \qquad (7)$$

عندما $x \neq 0$ ، نحصل على $f^{(k-1)}(x)$ بإعادة تفاضل الدالة e^{-1/x^2} والذي يعطينا في الأغلب 2^k من الحدود، حيث كل منها على شكل $x^{-m} e^{-1/x^2}$. إذن بواسطة الحسابات السابقة في (4) فإن:

$$\lim_0 \frac{f^{(k-1)}(x)}{x} = 0,$$

ويكون برهاننا قد اكتمل.

أيضاً من المحتمل لدالة في $C^\infty(\mathbb{R})$ أن تكون لها متسلسلة تايلور غير تقاربية (ما عدا عند a، والتي يكون عندها التقارب تافهاً trivial). تكون مثل هذه الدالة أكثر تعقيداً من الدالة التي رأيناها في المثال 12.7، لهذا السبب لن ندرس دالة من مثل هذا النوع هنا.

للقارىء الذي يرغب في دراسة مثل هذا النوع من الدوال عليه أن يطلع على المرجع:

Gelbaum and Olmstead, Counter Examples in Analysis (San Francisco: Holden - Day, 1964), p.68.

تماريــن 12.3

1 ـ وضح أن كلًّا من الدوال التالية ليس لها متسلسلة ماكلورين:

(أ) $f(x) = |x|$

(ب) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{if} \quad x > 0, \\ 0, & \text{if} \quad x \leqslant 0, \end{cases}$

(جـ) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{if} \quad x > 0, \\ 0, & \text{if} \quad x \leqslant 0; \end{cases}$

(د) $f(x) = \begin{cases} x^P, & x > 0, \\ 0, & \text{if} \quad x \leqslant 0, \end{cases}$

حيث $P \in \mathbb{N}$.

2 ـ استعمل المعادلة (1) لايجاد متسلسلة ماكلورين للدوال التالية:

(أ) $f(x) = e^x$.

(ب) $f(x) = \cos x$.

(جـ) $f(x) = \sin x$.

(د) $f(x) = \log (1 + x)$.

(هـ) $$f(x) = \cosh x = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} .$$

(و) $$f(x) = \sinh x = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} .$$

12.4 الحد الباقي The Remainder Term

الآن وبعد أن أثبتنا أن فصل الدوال التحليلية فئة جزئية فعلية (proper) من C^∞، فإننا نرغب في تطوير بعض الطرق لتعيين ما إذا كانت الدالة مساوية لمجموع متسلسلة تايلور المناظرة لها أم لا. لنفرض أن f دالة على $(a - R ، a + R)$ C^∞ ونعرف:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

و

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x).$$

إن $S_n(x)$ هـو مجموع n من الحـدود الأولى من متسلسلة تايلور للدالـة f حـول a و $R_n(x)$ يسمى الحد الباقي من الرتبة n. من الواضح أن:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_n R_n(x) = 0.$$

لهذا فإن f دالة تحليلية على $(a - R \text{ ، } a + R)$ إذا وفقط إذا كان $\lim_n R_n(x) = 0$ لكل x في $(a - R \text{ ، } a + R)$.

لقد رأينا المجموع $S_n(x)$ في الفصل السادس عندما سميت النظرية 6.6 بصيغة تـايلور مع الحدّ الباقي والتي أكدت أن:

$$f(x) = S_n(x) + \frac{f^{(n)}(\mu_n)}{n!} (x-a)^n. \tag{1}$$

حيث $f^{(n)}$ تـوجد بـين a و x وكذلـك μ فهي محصورة بـين x و a. في الحالـة العامـة تؤكد صـيغـة تـايـلور أن f في $(a - R \text{ ، } a + R)$ $C^{(n)}$. لهـذا الـسـبـب فـإنـه لـكـل x في $(a - R \text{ ، } a + R)$ تكون

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

حيث يعـبر عن $R_n(x)$ بالصيغـة الصريحة. في هـذا البند نحصـل على ثـلاث صيغ مختلفـة للحد الباقي. الأولى هي نتيجة تمَّ برهانها في الفصل السادس والتي تسمى صيغة تايلور.

وسنعـرضها هنـا بدون بـرهان مستعملين المصـطلحات والـرموز التي استعملت في هـذا الفصل.

نظرية 12.7 : (صيغة لاجرانج لـ R_n Lagrange form of).

إذا كانت f في $C^{(n)}(a - R ، a + R)$ و x في $(a - R ، a + R)$ ، فإنه يوجد عدد μ_n بين x و a بحيث يكون

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\mu_n)}{n!} (x - a)^n. \qquad (2)$$

الصيغة الثانية للحد الباقي تعبر عن R_n كتكامل محدود.

نظرية 12.8 : (الصيغة التكاملية لـ R_n Integral form of).

إذا كانت f في $C^{(n)}(a - R ، a + R)$ و x في $(a - R ، a + R)$ ، فإن:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt. \qquad (3)$$

البرهان:

إنّ اتصال (استمرارية) الدالة f يسمح لنا باستخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل لكتابة:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, dt,$$

وباستخدام التعويض $u = x - t$ ، نحصل على:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_{t=a}^{t-x} f'(x - u)\,(-du) \\ &= -\int_{u=x-a}^{u=0} f'(x - u)\, du \\ &= \int_0^{x-a} f'(x - u)\, du. \end{aligned}$$

الآن نستخدم التكامل بالتجزيء عدداً من المرات للحصول على

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \Big[u.\, f'(x - u)\Big]_{u=0}^{u=x-a} + \int_0^{x-a} uf''(x - u)\, du \\ &= f'(a)\,(x - a) + \int_0^{x-a} uf''(x - u)\, du \end{aligned}$$

$$= f'(a)(x-a) + \left[\left(\frac{u^2}{2}\right) f''(x-u)\right]_0^{x-a} + \int_0^{x-a} \left(\frac{u^2}{2}\right) f'''(x-u)\, du$$

$$= f'(a)(x-a) + \left(\frac{f''(a)}{2}\right)(x-a)^2 + \int_0^{x-a} \left(\frac{u^2}{2}\right) \cdot f'''(x-u)\, du$$

.

.

.

$$= f'(a)(x-a) + \ldots + \left(\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)(x-a)^{n-1}$$

$$+ \int_0^{x-a} \left(\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right) f^{(n)}(x-u)\, du$$

$$= S_n(x) - f(a) + \left(\frac{1}{(n-1)!}\right) \int_0^{x-a} u^{n-1} f^{(n)}(x-u)\, du.$$

إذن

$$f(x) = S_n(x) + \left(\frac{1}{(n-1)!}\right) \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt,$$

وهو ما يكافىء (3) وبذلك يكون البرهان قد اكتمل.

يمكن اشتقاق الصيغة الثالثة للحد الباقي من الشكل التكاملي، وذلك باستخدام نظرية القيمة الوسطى للتكاملات (تمرين 7.2.7). بما أن الدالة $(x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)$ دالة متصلة على $(a-R \text{ ، } a+R)$ ، فإنه يوجد عدد c_n بين x, a حيث إن:

$$\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt = (x-c_n)^{n-1} f^{(n)}(c_n)(x-a)$$

بتعويض هذا في (3)، نحصل على النتيجة التالية.

نظرية 12.9 : صيغة كوشي لـِ R_n (Cauchy form of R_n).

إذا كانت f في $C^{(n)}(a-R \text{ ، } a+R)$ و x في $(a-R \text{ ، } a+R)$ ، فإنه يوجد عدد c_n بين a و x بحيث يكون:

$$R_n(x) = \left(\frac{f^{(n)}(c_n)}{(n-1)!}\right)(x-c_n)^{n-1}(x-a). \qquad (4)$$

12.5 متسلسلة تايلور لبعض الدوال الأولية

Taylor Series of some Elementary Functions

البند الأخير لهذا الباب يتكوَّن من عدة أمثلة في كل حالة نبرهن على أن بعض الدوال الأولية المعروفة تساوي مجموع متسلسلة ماكلورين المناظرة لها (قارن مع تمرين 12.3.2).

مثال 12.9 :

إنّ كثيرة الحدود P دالة هي تحليلية على $\mathbb{R}$. إذا كانت:

$$P(x) = a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0,$$

وبعد القيام بعملية سهلة نستطيع توضيح أن:

$$P^{(k)}(0) = (k!)\, a_k \quad \text{لكل} \quad k \leqslant N .$$

إذاً معاملات الدالة كثيرة الحدود تكوّن معاملات تايلور الـ $(N + 1)$ الأولى، وبما أن $P^{(k)}(x) = 0$ عندما تكون $k > N$ ، نرى أن $R_n(x) = 0$ عندما تكون $n > N$.
لهذا السبب فإنه من الواضح أن:

$$\lim_n R_n(x) = 0.$$

لاحظ أن متسلسلة ماكلورين للدالة P هي P نفسها.

مثال 12.9 :

إنّ الدالة الأسية هي دالة تحليلية على $\mathbb{R}$. بتكرار التفاضل للدالة e^x ، نجد أن معامل ماكلورين ذي الرتبة k هو $a_k = \dfrac{1}{k\,!}$ (انظر التمرين 12.3.2a). إن صيغة لاجرانج لـ R_n هي:

$$R_n(x) = \frac{e^{\mu_n} x^n}{n!},$$

حيث يكون μ_n بين صفر و x. بما أن $|\mu_n| < |x|$ فإنه لدينا $e^{\mu_n} < e^{|x|}$ لكل n. إذن

$|R_n(x)| < e^{|x|}|x|^n / n!$. أيضـاً $\lim_n \left(\frac{x^n}{n!}\right) = 0$ ؛ لأن المتسلسلة $\sum \frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل x . لهذا السبب فإن :

$$\left|\lim_n R_n(x)\right| \leq e^{|x|} \lim_n \frac{|x^n|}{n!} = 0,$$

وإذن فإن :

$$e^x = \sum \left(\frac{1}{k!}\right) x^k \qquad (1)$$

لكل x في $\mathbb{R}$.

مثـال 12.10 :

دالة الجيب هي دالة تحليلية على $\mathbb{R}$. بالحساب المباشر للمشتقات المتعاقبة للدالة sin x ، نجـد أن $a_{2k} = 0$ لكل k في $\mathbb{N}$ و $a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}$ (انـظر التمـرين 12.3.2 ج) . أيضاً المشتقة من الرتبة n للدالة sin x تكون إما $\pm \sin x$ أو $\pm \cos x$ ، ولهذا فإن الحد المطلق لها لا يتعدى 1 . إذن صورة لاجرانج لـ $R_n(x)$ يحقق

$$|R_n(x)| \leq \left(\frac{1}{n!}\right)|x^n|,$$

ونعرف أن $\lim_n \frac{|x^n|}{n!} = 0$ ، ولهذا فإن $\lim_n R_n(x) = 0$ ،

إذن فإن :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad (2)$$

لكل x في $\mathbb{R}$.

مثـال 12.11 :

الدالة المعطاة بالصيغة $\log(x+1)$ هي دالة تحليليـة على $(-1, 1)$. التفـاضل المتكـرر يعطي :

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$$

إذا كان $x > -1$ ،

ولهذا فإن معاملات ماكلورين معطاة كالآتي:

$$\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$ إذا كان $k > 0$.

(انظر التمرين 12.3.2 د). لتوضيح أن $\lim_n R_n(x) = 0$ ، نشتق صيغة خاصة لـ $R_n(x)$ (قارن ذلك لتمرين 12.2.5). ندرس المجموع الهندسي:

$$1 - t + t^2 - \dots = \frac{1 - (-t)^{n-1}}{1 - (-t)} = \frac{1}{1 + t} - \frac{(-t)^{n-1}}{1 + t}$$

إذا كان x في $]-1, 1[$ ، فإننا نستطيع إجراء التكامل من صفر إلى x لنحصل على:

$$\int_0^x \frac{dt}{1 + t} = \int_0^x \left[1 - t + t^2 + \dots + (-t)^{n-2}\right] dt + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1 + t} dt,$$

والذي يكافىء

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{(-x)^{n-1}}{k - 1} + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1 + t} dt$$

$$= S_n(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1 + t} dt.$$

إذن فإن:

$$R_n(x) = (-1)^{n-1)} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1 + t} dt \qquad (3)$$

إذا كان $0 \leqslant x \leqslant 1$ ، فإن $0 \leqslant t \leqslant x$ يؤدي إلى $\left(\frac{t^{n-1}}{1 + t} \right) \leqslant t^{n-1}$ ولهذا فإن (3) تحقق:

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \int_0^x t^{n-1} dt = \frac{x^n}{n},$$

والـذي يـوضـح أن $\lim_n R_n(x) = 0$. إذا كـان $-1 < x < 0$ ، فـإن $x \leqslant t \leqslant 0$ يؤدي إلى:

$$\left| \frac{t^{n-1}}{1+t} \right| \leqslant \frac{|t^{n-1}|}{(1+x)},$$

ولهذا فإن (3) تحقق:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x} \left| \int_0^x t^{n-1}\, dt \right| = \frac{|x^n|}{(1+x)n} < \frac{1}{(1+x)n}$$

إذن $\lim_n R_n(x) = 0$ لكل x في $(-1, 1]$. و

$$\log(1+x) = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \qquad (4)$$

إذا كان $-1 < x \leqslant 1$.

لاحظ أننا برهنا على أن (4) صحيح عند $x = 1$ كما هو صحيح على $(-1, 1)$. بالرغم من أننا لم نقل بأن $\log(1+x)$ دالة تحليلية عند نقطتي نهاية الفـترة مثل $x = 1$ ، ولكن نستطيع أن نعوض عن $x = 1$ في المعادلة (4) لنحصل على المجموع المهم الآتي:

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

لهذا رأينا أن مجموع المتسلسلة التوافقية المتعاقبة هو لوغارتم العدد 2 (هذا هو تأكيـد التمرين 12.2.5).

تمارين 12.5

1 - بـرهن على أن دالـة جيب التمام $(\cos x)$ دالـة تحليلية عـلى $\mathbb{R}$ ولكل عـدد حقيقي x يكون:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

2 - برهن على أن دالة الظل العكسية (acrtan(x)) دالة تحليلية على (1 ,1−) ولكل x في [1 ,1−]

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

(إرشاد: خد مفكوك $\frac{1}{(1+t^2)}$ كمتسلسلة هندسية وكامل، قارن ذلك بتمرين 12.2.4).

3 - أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right) \sin x$ ووضح أن f دالة تحليلية على $\mathbb{R}$.

4 - أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة المعطاة كالآتي:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

(مساعدة: عوض $-t^2$ بدلاً من x في المثال 12.9).

5 - أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة المعطاة كالآتي:

$$f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt.$$

6 - أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = e^{-x^2}$ ووضح أن f دالة تحليلية على $\mathbb{R}$.

7 - أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = e^{x^2}$ ووضح أن f دالة تحليلية على $\mathbb{R}$.

8 - أوجد حاصل ضرب كوشي لمتسلسلتي ماكلورين لكل من cos x, sin x، واستخدمه لبرهنة أن لكل x في $\mathbb{R}$، $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

الفصل الثالث عشر

13

الفضاءات المترية والفضاءات الاقليدية

Metric Spaces and Euclidean Spaces

13.1 الفضاءات المترية Metric Spaces

موضوعنا في هذا الباب مزدوج: إذْ نرغب في وضع أساس نظرية الحساب متعدد الأبعاد، ونريد لهذا الأساس أن يكون عاماً بدرجة كافية لكي نتعرف على بعض المفاهيم النهائية في صياغة مجردة. وفي هذه الحالة فإن مصطلح «مجرد» يعني أن موضوعات دراستنا لا يجب أن تكون أعداداً أو حتى ذات خواص حسابية مثل الأعداد. والخاصية التي تعتبر هامة وأساسية لفكرتنا عن النهايات هي: مفهوم البعد بين العناصر. وكل مفهوم للنهاية رأيناه حتى الآن كان مؤسساً على سؤال ما إذا كان عددان ما قريبين بدرجة كافية من بعضهما عند تحقق شروط معينة. ولذا فإن تجريدنا سيتجلى في منظومة يطلب أن يكون لعناصرها ـ فقط ـ خاصية «البعد بين زوج من العناصر». وفيما يلي سيرمز بالرمز $X \times X$ إلى مجمل كل الأزواج المرتبة لعناصر X أي أن:

$$X \times X = \{(x, y) : x \in X \quad \text{و} \quad y \in X\}.$$

تعريف 13.1:

الفضاء المتري (القياسي) هو: منظومة تتكون من الفئة X التي تسمى عناصرها بالنقط، ودالة d ونطاقها هو كل $X \times X$ ومداها $[0 ، \infty)$ ، بحيث تتحقق لها الخواص التالية:

(i) $d(x, y) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ لكل x, y في X.

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ لكل x, y, z في X.

وهذه الخواص الثلاث تعتبر طبيعية للغاية لفكرتنا الحدسية عن البعد (distance)، وتؤكد الخاصية (i) على أن أية نقطة تبعد بمسافة صفر عن نفسها، ولا توجد نقطتان مختلفتان تبعدان عن بعضهما بمسافة صفر. والخاصية (ii) هي خاصية التماثل (symmetry) التي تؤكد على أن البعد من النقطة x إلى النقطة y يجب أن يساوي البعد من y إلى x. ومعنى الخاصية الثالثة أقل وضوحاً، وهي تسمى بالمتباينة المثلثية؛ لأنها تؤكِّد في صياغة مألوفة جداً على أن طول أي ضلع في المثلث لا يفوق مجموع طولي الضلعين الآخرين. وفي فضائنا المجرد، فإن دالة البعد d، وفقاً للخاصية (iii) تعطي دائماً «أقصر بعد» بين نقطتين؛ لأنه إذا سرنا من x إلى z عن طريق نقطة ثالثة ما y، فإن المسافة الكلية $d(x, y) + d(y, z)$ هي على الأقل مساوية «للبعد المباشر» $d(x, z)$.

وقبل تطوير أي نظرية من نظريات الفضاء المتري نعطي بعض الأمثلة لتوضيح التعريف. والمثال الأول ربما يكون أكثرها طبيعية. وهو مؤسس على مجموعة الإحداثيات الكارتيزية، وصياغة الهندسة الاقليدية المستوية، وكذلك المنظومة التي نرى فيها الأشياء والأبعاد في أسهل طريقة.

مثال 13.1:

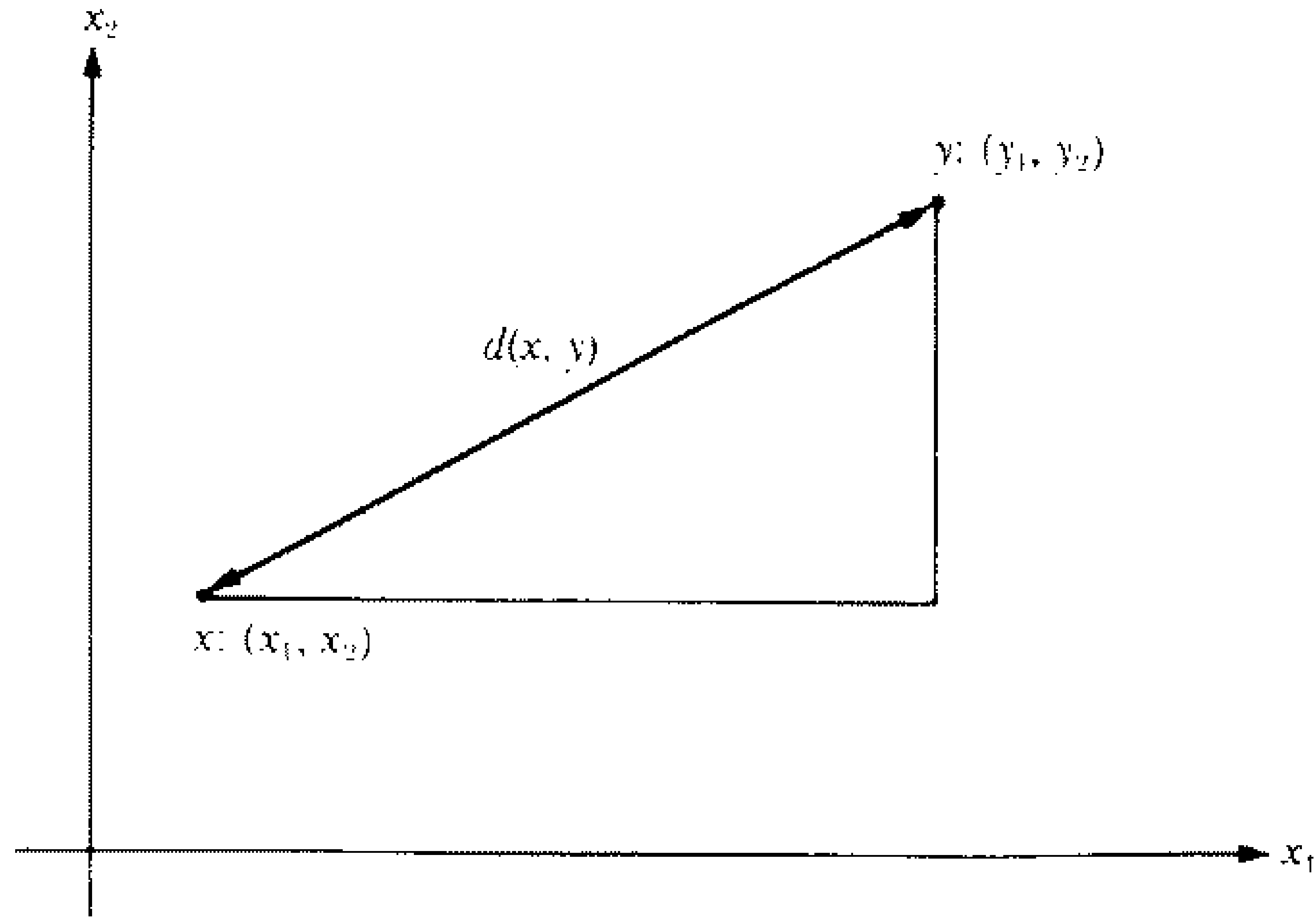
نفرض أن X هي $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$، فئة كل الأزواج المرتبة للأعداد الحقيقية، ونعرف d كما يلي:

إذا كانت $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ فإن

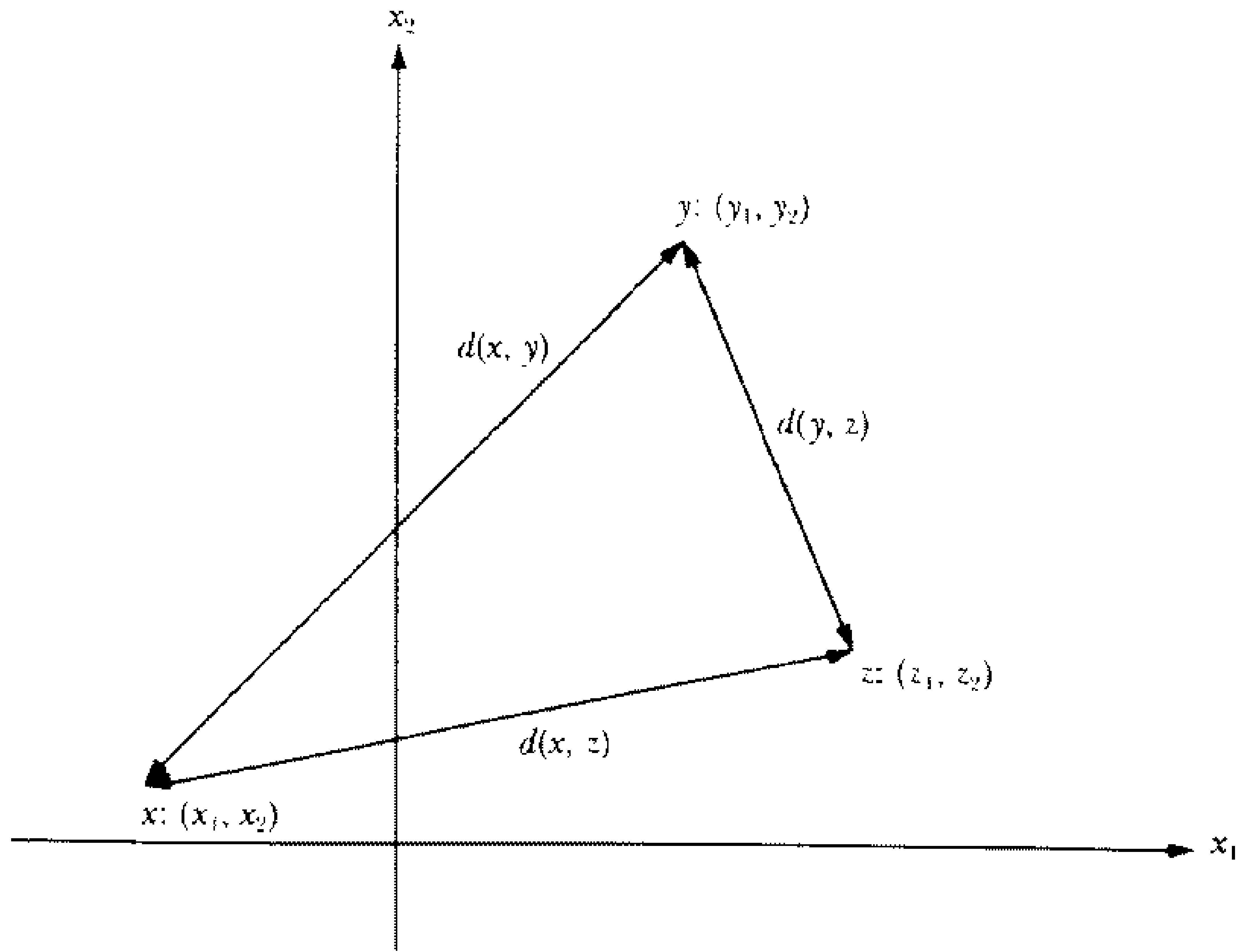
(1)
$$d(x, y) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

كن حذراً فيما يتعلق بالرموز، فالأدلة التحتية لا تشير إلى النقطة الأولى أو الثانية وهو الأمر الشائع في معظم الكتب الأولية، وإنما يكون لكل نقطة p «احداثي أول» p_1 و «احداثي ثاني» p_2.

وكما نرى في شكل 13.1، فإنّ البعد $d(x, y)$ معطى بنظرية فيثاغورث، ويوضح شكل 13.2 متباينة المثلث، والخاصيتان (i)، (ii) واضحتان.



شكل (13.1)



شكل (13.2)

مثـــال 13.2 :

نفرض أن X هي $\mathbb{R}$ ونعرّف d بالصيغة:

$$d(x, y) = |x - y| \qquad (2)$$

لكل x, y من $\mathbb{R}$. وحيث إن العدد $|x - y|$ يمثل البعد بين النقطتين، على خط الأعداد، المناظرتين للعددين x, y، فإن هذا هو التعريف الطبيعي للبعد في $\mathbb{R}$.

وتتحقق الخواص (i), (ii), (iii) كما هو واضح .

مثـــال 13.3:

نفرض أن $X = \mathbb{Q}$ فئة الأعداد القياسية ونعرّف d بالصيغة:

$$d(x, y) = |x - y| \qquad (3)$$

لكـل x ، y من $\mathbb{Q}$، وحيث إن $\mathbb{Q}$ هي فئة جـزئيـة من $\mathbb{R}$ فـإن حقيقـة تحقّق الخـواص (i), (ii), (iii) لجميع x, y, z من $\mathbb{R}$ يضمن تحقق هذه الخواص لجميع x, y, z من $\mathbb{Q}$.

ويوضح المثال 13.3 حقيقة عامة عن الفضاءات المترية التي تكون مفيدة أحياناً في الأمثلة. ونصيغها هنا بوصفها مفترضاً تنتج صحته مباشرة من تعريف الفضـاء المتري، ومفهـوم الفئة الجزئية:

مفترض 13.1:

إذا كان X فضاء مترياً بدالة البعد d، وكانت Y فئـة جزئيـة من X، فإن Y فضـاء متري بدالة البعد d، حيث يكون نطاق d مقيداً الآن بالنطاق $Y \times Y$.

وقبل الانتهاء من هذا البند نقدم مثالاً إضـافياً عـلى الفضاء المـتري. وإذ يبين هـذا المثال تعريفاً متطرفاً لدالة البعد، لكنه يظل يحقّق خواص دالة البعد المترية.

مثـــال 13.4:

نفرض أن X هي أية فئة (غير خالية)، ونعيّن الدالة المترية المنفصلة d (discrete metric) بالصيغة:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases} \qquad (4)$$

لجميع x, y من X. ومن الواضح من (4) أن (ii) و (i) تتحققان. وللتحقق من (iii) نـأخذ أيـة نقط x, y, z في X. إذا كان $d(x, z) = 0$ ، فـإن (iii) تكون واضحـة تمامـاً (تـافهـة trivial). نفرض أن $d(x, z) > 0$ عندئذ تؤدي (4) إلى أن $x \neq z$ وأن $d(x, z) = 1$.

والآن $x \neq z$ تعني أن y لا يمكن أن تكـون مسـاويـة لأي منهـما، ومن هنـا فـإن واحـداً عـلى الأقل من البعدين $d(y, z)$ و $d(x, y)$ يجب أن يساوي 1. ومن ثم فمتباينة المثلث يجب أن تتحقق.

تمارين 13.1

في التمارين 1-9، X هي $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ عيّن لدالة البعد المعطاة أي من الخواص (i), (ii), (iii) تتحقق وارسم فئة كل النقط x بحيث يكون البعد من x إلى (0, 0) مساوياً للواحد الصحيح 1.

1 - $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$

2 - $d(x, y) = |x_1 - y_1| + 2\,|x_2 - y_2|.$

3 - $d(x, y) = |x_1 - y_1|.$

4 - $d(x, y) = |x_2 - y_2|.$

5 - $d(x, y) = \max\left\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right\}.$

6 - $d(x, y) = \max\left\{|x_1 - y_1|, 2\,|x_2 - y_2|\right\}.$

7 -
$$d(x, y) = \begin{cases} \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]^{1/2}, & \text{if} \quad x_2 \neq y_2, \\ \left(\frac{1}{2}\right)\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]^{1/2}, & \text{if} \quad x_2 = y_2. \end{cases}$$

8 -
$$d(x, y) = \begin{cases} \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]^{1/2}, & \text{if} \quad x_2 \geqslant y_2, \\ |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, & \text{if} \quad x_2 < y_2. \end{cases}$$

9 -
$$d(x, y) = \begin{cases} 3\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]^{1/2}, & \text{if} \quad x_2 \geqslant 0\, y_2 \geqslant 0 \\ \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]^{1/2}, & \text{if} \quad x_1 < 0. \ \text{و} \ y_1 < 0 \end{cases}$$

10 - أثبت تعميم المتباينة المثلثية لحالة m نقطة

إذا كانت النقاط $x^{(1)}$ ، $x^{(2)}$ ، .. ، $x^{(m)}$ في الفضاء المتري X، فإن:

$$d\left(x^{(1)}, x^{(m)}\right) \leqslant \sum_{j=2}^{m} d\left(x^{(j)}, x^{(j-1)}\right).$$

نقدم في هذا البند فصلاً من الفضاءات المترية يعمم الفضاء المألوف ثنائي البعد، الوارد في المثال 13.1. وقد اشتق مصطلح الاقليدي من حقيقة أن الحالة ثنائية البعد هي أساس الهندسة الاقليدية المستوية.

تعريف 13.2:

نفرض أن n عدد صحيح موجب مثبت، وأن E^n ترمز إلى فئة كل المتتاليات العددية (النهائية)(*) $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{n}$. نفرض أن d هي الدالة المعرّفة على $E^n \times E^n$ بالصيغة

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Big[\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\Big]^{1/2}. \qquad (1)$$

وعندئذٍ تسمى E^n بدالة البعد d بالفضاء الاقليدي نوني البعد، أو باختصار بالفضاء - n الاقليدي.

لاحظ أنه في حالة $n = 1$ يكون لدينا $E^1 = \mathbb{R}$ وتصبح (1) على الصورة:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| = |x - y|.$$

وبذلك فإن E^1 هو مجرد $\mathbb{R}$ بدالة البعد المعتادة.

وكل عنصر من E^n يسمى بالنقطة ويكتب عادة على الصورة:

$$\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{n} = (x_1, \ldots, x_n).$$

ولكل $k = 1, \ldots, n$ يسمى العدد x_k بالاحداثي k لـ $\mathbf{x}$. لاحظ أن الصفة «المترية» قد حذفت بعناية في تعريف الفضاء الاقليدي. ومع ذلك فإنّ هدفنا المباشر هو التحقق من أن العلاقة (1) للتعريف 13.2 تعطي بالفعل E^n بدالة بعد مترية. ومن الواضح من (1) أن الخاصيتين (ii) و (i) من التعريف 13.1 تتحقق، ولكن (iii) ستتطلب بعض العمليات الجبرية المطوّلة للتحقق المباشر (الجذر التربيعي يسبب هذه الصعوبة).

(*) (المتتاليات النهائية). (المترجم)

ولـذلـك سنثبت المتبـاينـة المثلثيـة بـطرق مختلفـة، إحـداهـا تتجنب معـظم الحسـابـات جبرية. وفي هذه الطريقة تستخدم صيغـة المتسلسلات في متبـاينة كـوشي - بونيـاكوفسكي - شوارتز (انظر النظرية 7.10).

نظرية 13.1 : متباينة كوشي - بونيا كوفسكي - شوارتز.

إذا كان كل من x و y في E^n ، فإن:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \Big[\sum_{k=1}^{2n} x_k^2\Big]^{1/2} \Big[\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big]^{1/2}.$$

البرهان:

ندرس ثلاثية الحدود التربيعية $Q(t) = At^2 + Bt + C$ حيث:

$$A = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \quad و \quad B = \sum_{k=1}^{n} 2\, x_k\, y_k \quad و \quad C = \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

عندئذٍ:

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 t^2 + 2x_k y_k t + y_k^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k t + y_k\right)^2 \geq 0.$$

بما أن $Q(t)$ لا يمكن أن تكون سالبة أبداً، فلا يمكن أن يكون لها أصفار (جذور) مختلفة، وهكـذا نحصل من العـلاقة الـتربيعية المعـروفة أن مميـزهـا $B^2 - 4AC$ لا يمكن أن يكـون موجباً. ولهذه المعادلة التربيعية الخاصة يكون $B^2 - 4AC < 0$ مكافئاً للمتباينة:

$$4\Big[\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\Big]^2 - 4\Big[\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big]\Big[\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big] \leq 0,$$

التي تعطي مباشرة متباينة كوشي - بونياكوفسكي - شوارتز.

لاحظ أن هـذا البرهـان هو في الأسـاس نفس برهـان النظريـة 7.10 للصيغـة التكـامليـة للمتباينة.

نتيجة (a) 13.1 : المتباينة المثلثية للفضاء E^n.

إذا كان كل من $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ نقطة في E^n فإن

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

13.2 تماريــن

١ ـ أثبت المتباينة المثلثية لـ m من النقاط : إذا كانت :

$x^{(1)}$ ، $x^{(2)}$ ، … ، $x^{(m)}$ هي m من النقط في $E^{(n)}$ ، فإن

$$d(x^{(1)}, x^{(m)}) \leq \sum_{j=2}^{m} d(x^{(j-1)}, x^{(j)}).$$

٢ ـ هنـاك دالة بعـد متريـة أخرى للفضـاء $E^{(n)}$ تسمى بـالتـاكسكـاب المـتري (taxicab metric) :

$$d^*(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|.$$

أثبت أن d^* تحقق الخواص (iii) و (ii) و (i) من التعريف 13.1 .

٣ ـ أثبت أنـه لأي x, y في E^n يكـون $d(x, y) \leq d^*(x, y)$ حيث يعـرف d^* كـما في تمرين 2 .

(ارشاد : في حالة $n = 2$ يمكن أن تكتب:

$$d^*(x, y) = d(x, x') + d(x', y)$$

حيث $(x' = (x_1, y_2)$.

13.3 طبولوجيا الفضاء المتري Metric Space Topology

طبولوجيا فضاء النقط تعطينا نظرية نقط النهاية وتقارب فئات النقط في الفضـاء . وتؤسس نظرية التقارب هذه في الفضاء المتري على مفهوم البعد بين النقط . وللفضاءات الأكثر تجريداً تؤسس على مجموعة من «الفئات المفتوحة» ، وقـد لا يوجـد هناك مفهـوم للبعد مـلازم لفكرة النهاية . وهنا نحن نأخذ التناول السابق ونستعين بدالة البعد المتري لنعـرف «فئات مفتـوحة» معينـة هي تعميم للفترات المفتـوحة في IR . وخـلال هذا البنـد سنفرض أن X فضـاء متري بدالة البعد d .

تعريف 13.3:

إذا كانت x نقطة في X، وكان r عدداً غير سالب، فإن

$$N_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

تسمى بالكرة المفتوحة ذات نصف القطر r حول x.

$$\overline{N}_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

تسمى بالكرة المغلقة ذات نصف القطر r حول x. وجوار (neighborhood) x هو أية فئة جزئية من X تحتوي على كرة مفتوحة ما حول x.

لاحظ أنه لأية نقطة x من X تكون $N_0(x) = \emptyset$

أي أن الكرة المفتوحة التي نصف قطرها يساوي صفراً تكون خالية. وكذلك $\overline{N}_0(x) = \{x\}$ ، حيث $\{x\}$ ترمز إلى الفئة وحيدة العنصر التي تتكون من نقطة واحدة x.

مثال 13.5:

إذا كان $X = E^1 = \mathbb{R}$ ، فإنه لأي x من $\mathbb{R}$، و $r > 0$ يكون:

$$N_r(x) = (x - r \text{ ، } x + r);$$

أي أن الكرة المفتوحة حول x هي فترة مفتوحة مركزها x. وبالمثل تكون الكرة المغلقة فترة مغلقة.

مثال 13.6:

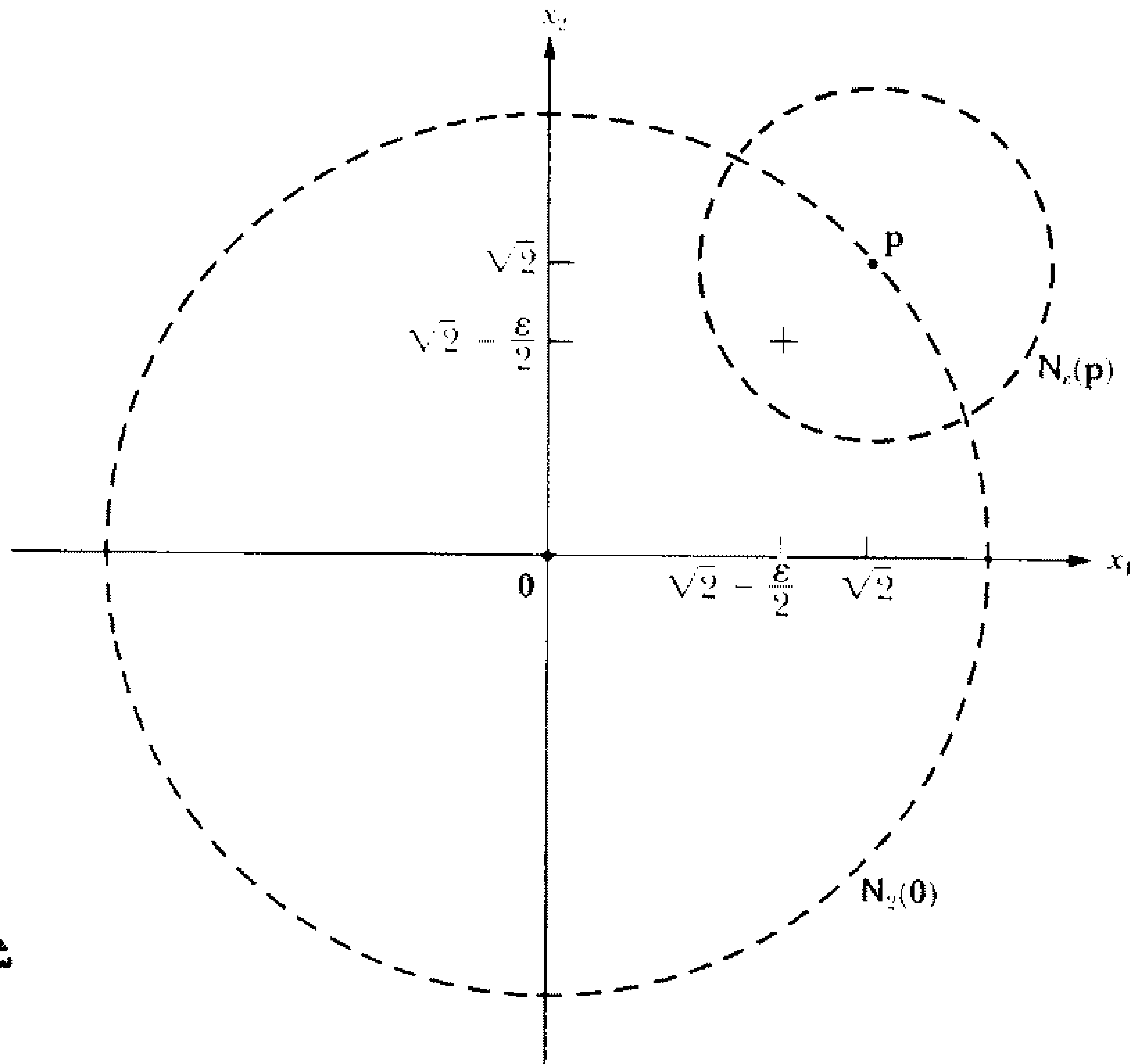
إذا كان $X = E^2$ ، فإنه لأي x من E^2 ، و $r < 0$ يتكوّن $N_r(x)$ من كل النقط الواقعة داخل دائرة نصف قطرها r ومركزها x. والكرة المغلقة $\overline{N}_r(x)$ تتكوّن من تلك النقط الواقعة داخل أو على الدائرة.

مثال 13.7:

إذا كان $X = E^3$ ، فإن الكرات المفتوحة والمغلقة هي كرات بالمعنى العادي، وتتكوّن الكرة المغلقة من كل النقط الواقعة داخل أو على سطح كرة نصف قطرها r ومركزها x ، في حين تتكون الكرة المفتوحة فقط من النقط الواقعة داخل الكرة.

تعريف 13.4 :

نفرض أن A فئة جزئية من X، تسمى النقـطة p بنقطة نهايـة A (limit point) إذا كانت كل كرة مفتوحة حول p تحوي نقطة من A تختلف عن p نفسها.



شكل (13.3)

مثـــال 13.8 :

في E^2 نفرض أن A هي الفئة $N_2(0)$ ، ونفـرض أن $p = (\sqrt{2} \text{ ، } \sqrt{2})$. عندئـذ تكون **p** نقطة نهاية للفئة A؛ لأنه إذا كان $N_\varepsilon(p)$ كـرة مفتوحـة اختياريـة حول **p**، فـإن $N_{\varepsilon(p)}$، تحتـوي نقـطاً داخـل الكـرة $N_2(0)$. عـلى سبيـل المثـال تـوجـد النقـطة $\left(\sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{2} \text{ ، } \sqrt{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ في $N_2(0) \cap N_\varepsilon(p)$ (انـظر شكـل 13.3). اختـبر المتباينات للتحقق من ذلك. لاحظ أن **p** ليست في $N_2(0)$ وهكذا نرى أن النقطة يمكن أن تكون نقطة نهاية لفئة دون أن تكون عنصراً في هذه الفئة.

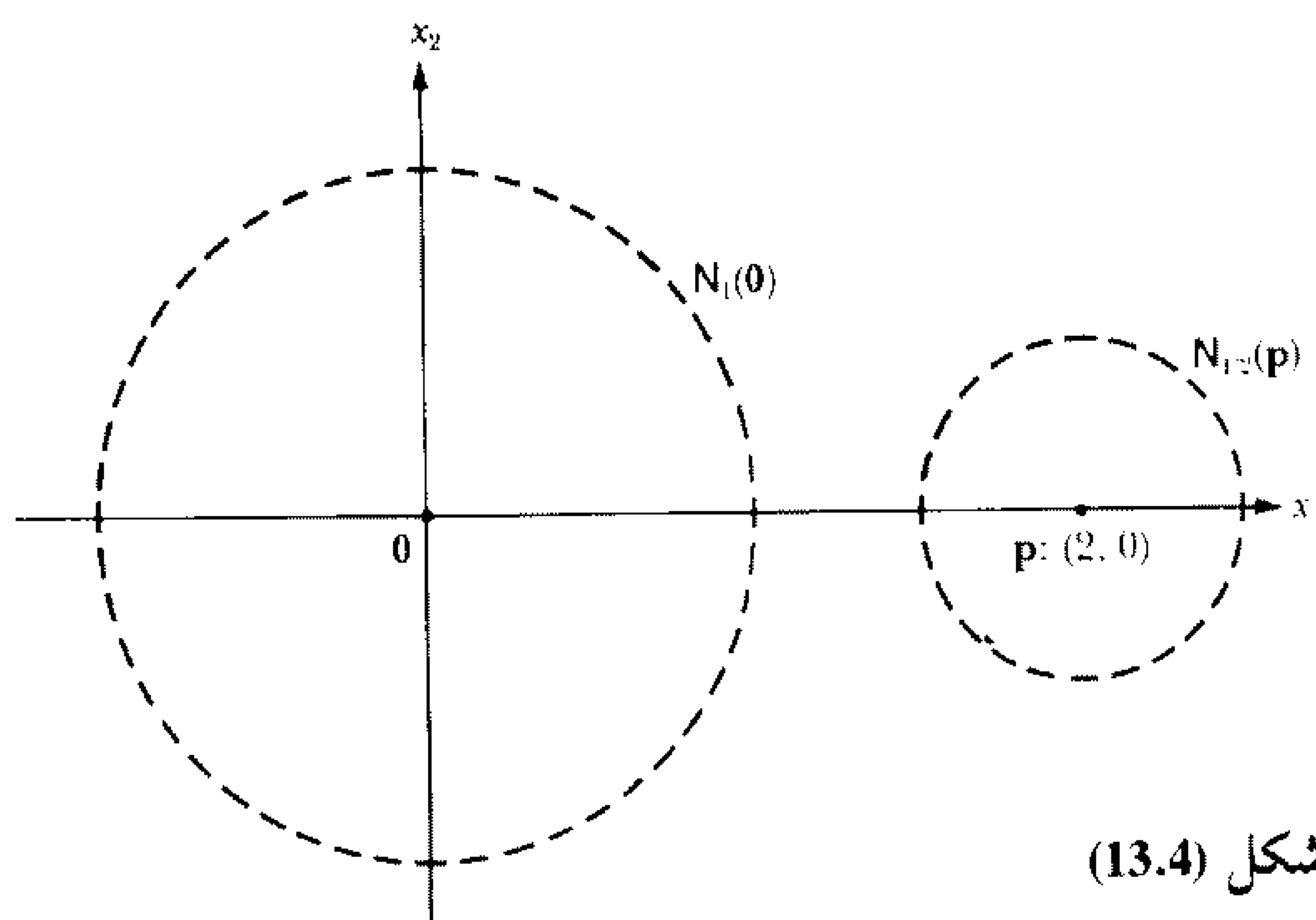
مثـــال 13.9 :

في E^2 نفرض أن A هي الفئة $N_1(0) \cup \{p\}$ حيث $p = (2, 0)$. عنـدئذ فـإن p

ليست نقطة نهاية للفئة A؛ لأن الكرة $N_{1/2}(\mathbf{p})$ لا تحتوي على نقط من A سوى **p** نفسها. وعلى الرغم من أن هذا التأكيد واضح في شكل 13.4 فإن برهانه ليس بالأمر السهل. ونثبته بالتناقض الآتي: نفرض أنه توجد نقطة **y** في $N_{1/2}(\mathbf{p}) \cap A$ بحيث إن $\mathbf{y} \neq \mathbf{p}$. عندئذٍ فإن **y** يجب أن تكون في $N_1(\mathbf{0})$؛ ولذا فإن $d(\mathbf{0}, \mathbf{y}) < 1$ وأيضاً فإن **y** في $N_{1/2}(\mathbf{p})$ ومن ثم فإنّ $d(\mathbf{y}, \mathbf{p}) < \frac{1}{2}$ ومن ثم فإن المتباينة المثلثية تعطينا:

$$d(\mathbf{0}, \mathbf{p}) \leqslant d(\mathbf{0}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{p})$$

$$< 1 + \frac{1}{2}\ ;$$



شكل (13.4)

ولكن استناداً لصيغة البعد في E^2 فإنّ:

$$d(\mathbf{0}, \mathbf{p}) = 2.$$

وهذا التناقض يعني عدم وجود مثل هذه النقطة **y**، ولذا فلا تحتوي $N_{1/2}(\mathbf{0})$ نقطاً من A مختلفة عن **p**.

وقد يبدو الشرط بأن تحتوي كل كرة حول p نقطة من A مختلفة عن p مصطنعاً بعض الشيء ولكنه ضروري لجعل هذا المفهوم لنقطة النهاية متفقاً مع التعريف الوارد في الباب الثاني، والأهم، أننا نحتاج إلى هذا الشرط للتفريق بين خاصية الوجود «قريباً من الفئة A» (أي نقطة النهاية) وخاصية الوجود «في الفئة A» (وهو عنصر في الفئة).

تعريف 13.5 :

تسمى الفئة A (في X) مفتوحة إذا وجدت لكل نقطة x من A كرة مفتوحة حول x محتواة في A.

وحتى إذا لم تكن الفئة A مفتوحة فقد يكون من الصحيح أن بعض نقطها هي مراكز لكرات مفتوحة محتواة كلياً في A.

ومثل هذه النقط تسمى نقطة داخلية للفئة A (interior point)، وتسمى الفئة الجزئية المكونة من كل هذه النقط الداخلية بـ: داخل (interior) الفئة A، ويرمز لها بالرمز A°. ومن الواضح أنه لأية فئة A يكون $A^\circ \subseteq A$. ومن الصحّيح أيضاً أن A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $A \subseteq A^\circ$ (أنظر تمرين 13.3.5).

ومفهوم الفئة المفتوحة هو تعميم لمفهوم الفترة المفتوحة التي لدينا في $\mathbb{R}$. ومعظم أمثلة الفئات المفتوحة نوقشت في التمارين، ولكننا هنا نذكر قليلاً منها. إنّ الكرة المفتوحة $N_r(x)$ هي فئة مفتوحة، وقد طُلِبَ برهان ذلك في تمرين 13.3.3. وأيضاً X من الواضح أنها مفتوحة، لأنها تحتوي على كرة حول كل نقطة. والفئة الخالية $\varnothing$ مفتوحة، لأنها لا تحتوي على أية نقط ينطبق عليها اختبار وجود النقطة الداخلية.

تعريف 13.6 :

إنّ الفئة F في X مغلقة إذا كانت F تحتوي كل نقط نهاياتها.

يوجد مثال سهل للفئة المغلقة هي الفئة المفردة (وحيدة العنصر) {x} (singleton set)، إذْ ليس لها نقطة نهاية، ولذا فلا يمكن أن تفشل في احتواء أية من نقط نهاياتها. وكما نرى في تمرين 13.3.2، يمكن تعميم ذلك على أية فئة نهائية. وكل الفراغ X هو فئة مغلقة لأنها بالتأكيد تحتوي على كل نقط نهاياتها. وبذلك فإن X مفتوحة ومغلقة على السواء. وبالمثل تكون $\varnothing$ مفتوحة ومغلقة. وفي E^n فإن هاتين الفئتين هما الوحيدتان اللتان تُعتبران مفتوحتين ومغلقتين. وبرهان ذلك في بند 13.4. وأيضاً تجب ملاحظة وجود فئات غير مغلقة وغير مفتوحة، كما في المثال التالي، الذي يجري التحقق من تفاصيله في تمرين 13.3.6.

مثال 13.10 :

نفرض أن F فئة جزئية من E^2 تتكوّن من

$$\left\{(1, 0) ، (\frac{1}{2}, 0) ، (\frac{1}{3}, 0) ، \dots ، (\frac{1}{k}, 0) \dots\right\}.$$

عندئذٍ فإن **0** هي نقطة نهاية للفئة F، وبما أنّ **0** ليست في F نستنتج أن F ليست مغلقة، وأيضاً النقطة (1, 0) ليست نقطة داخلية للفئة F، ومن ثم فإن F ليست مفتوحة.

إنّ النتيجة التالية (الواردة في النظرية 13.2) هي العلاقة الأساسية بين مفهومي الفئة المفتوحة والفئة المغلقة. ونرمز لمكملة (complement) الفئة A بالرمز $\sim A$ ، وهي اختصار للرمز $X \sim A$ وهي كل النقط في X التي ليست في A.

نظرية 13.2:

الفئة A مفتوحة إذا وفقط إذا كانت مكملتها $\sim A$ مغلقة.

البرهان:

نفرض أن A مفتوحة. لكي نبين أن $\sim A$ مغلقة، نلاحظ أن أية نقطة x ليست في $\sim A$ هي في A. وحيث إن A مفتوحة، فإنه توجد كرة $N_r(x)$ محتواة كلياً في A. وبذلك فإن $N_r(x)$ لا تحتوي على نقط من $\sim A$ ، وبالتالي فإن x ليست نقطة نهاية للمكملة $\sim A$ ، وبذلك فإن $\sim A$ لا يمكن إلّا أن تحتوي على كل نقط نهاياتها.

وبالعكس فإذا كانت A غير مفتوحة، فإنها تحتوي على نقطة ما y وهي ليست نقطة داخلية. وبذلك فكل كرة $N_r(y)$ لا يمكن أن تكون محتواة في A؛ ولذا فإن كل $N_r(y)$ تحتوي على نقطة من $\sim A$. وبذلك فإن y هي نقطة نهاية للمكملة $\sim A$ ، وبما أنّ y هي في A وليست في $\sim A$ ، نستنتج أن $\sim A$ ليست مغلقة.

وربما تكون قيمة النظرية 13.2 تكمن في أنها تعطينا طريقة بديلة لإثبات أن فئة ما تكون مفتوحة (أو مغلقة). ففي بعض الأحيان يكون من الأسهل العمل مع مكملة الفئة أكثر من الفئة نفسها. فعلى سبيل المثال نعلم مباشرة أن $X \sim \{x\}$ مفتوحة لأننا نعلم أن الفئة المفردة $\{x\}$ مغلقة.

نظرية 13.3:

إن تقاطع عدد نهائي من الفئات المفتوحة هو فئة مفتوحة.

البرهان:

نفرض أن A_1 ، ... ، A_n فئات مفتوحة، وأن x نقطة اختيارية في

$A_1 = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$. عندئذ تكون x في كل فئة من الفئات المفتوحة A_n ، ... ، A ، ولذا فلكل $k \leqslant n$ يوجد نصف قطر موجب r_k بحيث إن $\mathbf{N}_{r_k}(x) \subseteq A_k$. نعرّف $r = \min\{r_1 , \ldots , r_n\}$ عندئذ فلكل $k \leqslant n$ يكون

$$\mathbf{N}_r(x) \subseteq \mathbf{N}_{r_k}(x) \subseteq A_k \subseteq A.$$

ومن ثم فإن x في A°، وبهذا نكون قد أثبتنا أن A مفتوحة.

نتيجة 13.3 :

إن اتحاد عدد نهائي من الفئات المغلقة هو فئة مغلقة.

البرهان :

نفرض أن كلاً من $F_1 , \ldots , F_n$ فئة مغلقة. من السهل التحقق من أن المعادلة الفئوية التالية تتحقق :

$$\sim \bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcap_{k=1}^{n} (\sim F_k), \qquad (1)$$

ومن النظرية 13.2 تكون كل من $\sim F_k$ في الطرف الأيمن للمعادلة (1) فئة مفتوحة. ومن ثم وفقاً للنظرية 13.3 يكون تقاطعها وهو كل الطرف الأيمن للمعادلة (1)، فئة مفتوحة. ومن ثم فإن $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ مغلقة، لأن مكملتها مفتوحة.

ومن الضروري في النظرية 13.3 ونتيجتها أن نقيد المنطوق بعدد نهائي من الفئات. ونستعرض ذلك في المثال التالي :

مثـال 13.11 :

ليس من الضروري أن يكون اتحاد لانهائي من الفئات المغلقة فئة مغلقة. فعلى سبيل المثال، نفرض أن F_k هي الفئة المفردة المتكونة من نقطة واحدة $\left(\mathbf{0} , \frac{1}{k}\right)$ في E^2 . والبعد بين هذه النقطة ونقطة الأصل $\mathbf{0}$ هو $\frac{1}{k}$ ، ولذا ينتج أن $\mathbf{0}$ نقطة نهاية للفئة $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. ولكن $\mathbf{0}$ ليست في $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ ؛ ولذا فالاتحاد غير مغلق.

ومن السهل اعطاء مثال لعدد لانهائي من الفئات المفتوحة التي يكون تقاطعها فئة غير مفتوحة. على سبيل المثال نفرض $A_k = \mathbf{N}_{1/k}(\mathbf{0})$. من الواضح أن $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{\mathbf{0}\}$ ، والفئة المفردة $\{\mathbf{0}\}$ ليست مفتوحة.

نظرية 13.4:

اتحاد أي تجمع من الفئات المفتوحة هو فئة مفتوحة.

البرهان:

نفرض أنه لكل μ في فئة ما M تكون A_μ فئة مفتوحة. (تسمى الفئة M «بالفئة الدليلية» «index set» لتجمع الفئات $\{A_\mu : \mu \in M\}$).

نفرض أن x نقطة في $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu$. عندئذٍ تكون x تكون في فئة واحدة على الأقل من هذه الفئات، ولتكن مثلاً $x \in A_{\mu^*}$. وحيث إن A_{μ^*} مفتوحة فإنه توجد كرة $\mathbf{N}_r(x)$ بحيث إن $\mathbf{N}_r(x) \subset A_{\mu^*} \subseteq \bigcup_{\mu \in M} A_\mu$. ومن ثم فإن $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu$ هي فئة مفتوحة.

نتيجة 13.4:

يُشكّل تقاطع أي تجمُّع من الفئات المغلقة فئة مغلقة.

البرهان:

البرهان مشابه لبرهان نتيجة 13.3 ويترك كتمرين (تمرين 13.3.10).

وتنبغي الاشارة على وجه الخصوص إلى حقيقة أنّه يمكن أن يكون تجمع الفئات في النظرية 13.4 والنتيجة 13.4 كبيرة كبراً اختيارياً. وكحالة خاصة فإن التجمعات يمكن أن تحتوي عدداً كبيراً من الفئات بحيث لا يمكن وصفه كمتتالية لانهائية من الفئات (أنظر الملحق B لمناقشة مثل هذه الفئات غير القابلة للعد).

ولهذا السبب نستعين بطريقة الفئات الدليلية M لوصف التجمع. ولو كتبنا $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ لتجمع الفئات لكنا نشير إلى متتالية من الفئات، وبالتالي لحددنا مناقشتنا وقصرناها على التجمعات القابلة للعد.

تعريف 13.7 :

إذا كان $A \subseteq x$ ، فإن انغلاق (closure) A ويرمز له بالرمز $\bar{A}$ هو الفئة المتكونة من كل النقط x بحيث تتقاطع كل الكرات المفتوحة حول x مع A. أي أن:

$$\bar{A} = \{x \in X : N_r(x) \cap \neq \emptyset, r > 0 \text{ لكل } \}$$

ومن الواضح أنه لكل فئة يكون $A \subseteq \bar{A}$.

تمارين 13.3

في هذه التمارين تمثل A فئة نقط في فضاء متري اختياري X.

1 ـ أثبت أنه إذا كانت p نقطة نهاية للفئة A، فإن كل كرة مفتوحة $N_\varepsilon(p)$ تحتوي على عدد لانهائي من نقط A.

2 ـ أثبت أنه إذا كانت A فئة نهائية، أي أن A تحتوي فقط عدداً نهائياً من النقط، فإن A ليس لها نقطة نهاية.

3 ـ أثبت أنه لكل x في X و $r > 0$ تكون $N_r(x)$ فئة مفتوحة.

4 ـ أثبت أن A° هي أكبر فئة جزئية مفتوحة للفئة A، أي أنه إذا كانت B فئة مفتوحة بحيث أن $B \subseteq A$ فإن $B \subseteq A^\circ$.

5 ـ أثبت أن A مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $A = A^\circ$.

6 ـ قدم تفصيلات برهان التأكيدين الواردين في مثال 13.10.

7 ـ أثبت متساوية الفئات (1) المستخدمة في اثبات النتيجة 13.3.

8 ـ أثبت متساوية الفئات:

$$\sim \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (\sim A_\lambda).$$

9 ـ أثبت أنه يمكن كتابة A كاتحاد لتجمع من الفئات المغلقة.

10 ـ أثبت النتيجة 13.4.

11 ـ بيّن أن انغلاق $N_1(0)$ في E^2 هو $\overline{N_1(0)}$.

12 ـ نفرض أن Q^2 فئة جزئية من E^2 تتكون من كل النقط $X = (x_1, x_2)$ بحيث يكون كل من x_2, x_1 أعداداً قياسية. ما هو $\bar{\mathbb{Q}}^2$ ؟ وما هو $(\mathbb{Q}^2)^0$ ؟

13 ـ أثبت أنه $\bar{A}$ فئة مغلقة.

14 ـ أثبت أنه $\bar{A}$ هي أصغر فئة مغلقة تحتوي A، أي أنه إذا كانت F فئة مغلقة بحيث إن $A \subseteq F$ فإن $\bar{A} \subseteq F$.

15 ـ أثبت أنه إذا كان L_A يرمز إلى فئة كل نقط النهايات للفئة A، فإن L_A فئة مغلقة.

16 ـ أثبت: إذا كانت L_A معطاة كما في التمرين 15 فإن $\bar{A} = A \cup L_A$.

13.4 الترابط Connectedness

ندرس في هذا البند ظاهرة الفئة التي لا يمكن أن تكون «منفصلة طبيعياً» إلى فئتين جزئيتين أو أكثر. ويوحي لنا غموض العبارة «منفصلة طبيعياً» بأنه ليس من السهل اعطاء تعريف دقيق للخاصية التي نريدها. وسنعرّفها بالفعل بصياغة أولية عندما لا يكون للفئة هذه الخاصية.

تعريف 13.8:

الفئة S (في الفضاء المتري X) غير مترابطة (disconnected) إذا وجدت فئتان غير خاليتين S_2 و S_1 بحيث إن

$$S_1 \cup S_2 = S,$$

$$S_1 \cap \overline{S_2} = \varnothing \quad \text{و} \quad \overline{S_1} \cap S_2 = \varnothing. \qquad (1)$$

إذا لم تكن S غير مترابطة، فإنها تسمى بالمترابطة (connected).

ونقول: إن الفئتين A, B منفصلتان (disjoint) إذا كان $A \cap B = \varnothing$. ومن المهم أن نلاحظ أن الفئتين S_2 و S_1 في (1) تحققان خاصية أقوى من كونهما منفصلتين. فلا يجب

نتط ألا تكون S_2 و S_1 محتويتين لأية نقط من الفئة الأخرى، بـل يجب أيضاً ألا تحتـوي كل منهما على أية نقطة نهاية للفئة الأخرى.

وهذا الشرط الإضافي هو الذي يعطي للتعريف 13.8 قيمتـه ومعناه؛ لأن أيـة فئة تحتـوي على نقطتين أو أكثر يمكن أن تكتب كاتحاد لفئتين جزئيتين منفصلتين (disjoint) غير خاليتين:

إذا كان x في S، نأخذ $S_1 = \{x\}$ ، $S_2 = S - \{x\}$

ولكن كـما سنرى في النـظرية التـالية، عنـدما نتعـامل مـع الفئات المفتـوحة فـإن الانفصـال (disjointness) يكون كافياً لاستنتاج أن اتحاد هذه الفئات غير مترابط (disconnected).

نظرية 13.5:

الفئة S مترابـطة (connected) إذا وفقط إذا لم توجـد فئتان مفتـوحتان منفصلتـان B و A بحيث يكون:

$S \subseteq A \cup B$ ، $A \cap S \neq \varnothing$ و $B \cap S \neq \varnothing$.

البرهان:

نفـرض وجـود الفئتـين B و A كـما في نص النـظريـة ونفـرض أن $S_1 = A \cap S$ ، $S_2 = B \cap S$. من الـواضح أن S_2 و S_1 غـير خاليتـين وأن $S_1 \cup S_2 = S$. نأخـذ نقطة اختيـارية x في S_1، عنـدئذٍ تكـون x في الفئة المفتـوحة A؛ ولـذا فلعدد مـوجب ما r يكـون $N_r(x) \subset A$. وبـذلـك فـإن $N_r(x) \cap B = \varnothing$ ؛ لأن B و A منفصلتـان (disjoint). وهكذا ثم فإن $N_r(x) \cap S_2 = \varnothing$. وهكـذا $x \notin \overline{S_2}$ ، ومن ثم فإن $S_1 \cap \overline{S_2} = \varnothing$. بالمثل فإن $\overline{S_1} \cap S_2 = \varnothing$ ، ونستنتج أن S غير مترابطة.

والآن نـفـرض أن S غـير مـترابـطة، ولـيـكـن $S = S_1 \cup S_2$ و $S_1 \cap \overline{S_2} = \overline{S_1} \cap S_2 = \varnothing$. وحيث إن $S_1 \cap \overline{S_2} = \varnothing$ فليس هناك أية نقطة من S_1 تكـون نـقـطة نهايـة لـلفئـة S_2، ولـكـل x في S_1، نـخـتـار $N_r(x)$ بـحـيـث إن $N_r(x) \cap S_2 = \varnothing$.

عنـدئـذٍ فـإنّ $A = \bigcup_{x \in S_1} N_{r/2}(x)$ هي فئة مفتـوحـة لا تحتـوي عـلى أيـة نقط من S_2 (ويعتمد نصف القطر r للكرة $N_r(x)$ على x، على الرغم من أن رموزنا لا تشير إلى ذلك).

وبالمثل يمكننا اختيار كرة $\mathbf{N}_{r'}(y)$ لكل y في S_2، تحقق $\mathbf{N}_{r'}(y) \cap S_1 = \varnothing$ ونعرّف $B = \bigcup_{y \in S_2} \mathbf{N}_{r'/2}(y)$ وهي فئة مفتوحة وفقاً للنظرية 13.4. ويبقى علينا فقط أن نبين أن B و A منفصلتان. نفرض أنهما ليسا كذلك. ونفرض أن p نقطة تنتمي إلى كل من B و A. ومن ثم فلبعض x من S_1 و y من S_2 يكون:

$$p \in \mathbf{N}_{r/2}(x) \cap \mathbf{N}_{r'/2}(y).$$

ولكن هذا يؤدي إلى:

$$d(x, y) \leqslant d(x, p) + d(p, y) \leqslant \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} < \max\{r, r'\}. \quad (2)$$

ومن ثم فأما $y \in \mathbf{N}_r(x)$ أو $x \in \mathbf{N}_{r'}(y)$ مما يتناقض مع اختيارنا لأحد العددين r أو r' على الترتيب.

نظرية 13.6:

إذا كانت S مترابطة فإن $\overline{S}$ مترابطة.

البرهان:

نفرض أن $\overline{S}$ غير مترابطة، وأن B و A فئتان منفصلتان مفتوحتان كما في النظرية 13.5:

$$\overline{S} \subset A \cup B \quad \text{و} \quad \overline{S} \cap A \neq \varnothing \quad \text{و} \quad \overline{S} \cap B \neq \varnothing.$$

وحيث إن S محتواة في $A \cup B$ كما هو واضح، فعلينا أن نبين فقط أن $S \cap A \neq \varnothing$، $S \cap B \neq \varnothing$. نفرض أن x نقطة في $\overline{S} \cap A$. وحيث إن A مفتوحة فإنه توجد كرة حول x بحيث إن $\mathbf{N}_r(x) \subset A$. ولكن x أيضاً في $\overline{S}$ ولذا فإن $\mathbf{N}_r(x)$ يجب أن تحتوي نقطة ما y من S. ولذلك فإن $y \in \mathbf{N}_r(x) \cap S \subset S \cap A$؛ ولذا فإن $S \cap A \neq \varnothing$. وبالمثل فإن $S \cap B \neq \varnothing$ ولذا فمن النظرية 13.5 تكون S غير مترابطة.

وفي التمارين 13.4 نعرض بعض الأمثلة والخواص للفئات المترابطة والفئات غير المترابطة في الفضاء الاقليدي E^1 والفضاء الاقليدي E^2.

تمارين 13.4

1 - أثبت أنه إذا كانت S فئة جزئية منتهية للفضاء المتري X، فإن S غير مترابطة.

2 - في E^2، نفرض أن $S = \mathbf{N}_1(\mathbf{0}) \cup \{\mathbf{p}\}$ حيث $\mathbf{p} = (2, 0)$. بيّن أن S غير مترابطة.

3 - أثبت: في الفضاء المتري الاختياري X إذا كان $S - L_S \neq \emptyset$ فإن S غير مترابطة.

4 - نفرض أن f, g دالتان موجبتان بصرامة (Strictly) على $\mathbb{R}$ بحيث يكون المنحنيان:

$$G_1 \left\{\mathbf{x} \in E^2 \quad \text{و} \quad x_2 = f(x_1)\right\} \qquad G_2 = \left\{\mathbf{x} \in E^2 \quad \text{و} \quad x_2 = -g(x_1)\right\}$$

فئتين في E^2. أثبت أن $S = G_1 \cup G_2$ غير مترابطة.

5 - أعط مثالاً (مع التوضيحات) لفئة مترابطة S في E^2 تحتوي على نقطة واحدة بالضبط $\mathbf{p}$ بحيث إن $S - \{\mathbf{p}\}$ غير مترابطة.

6 - نفرض أن S فئة مترابطة في E^2 تحتوي النقطتين $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ بحيث إن $x_1 < y_1$. أثبت أنه لأي عدد μ بحيث يكون $x_1 < \mu < y_1$ توجد النقطة $\mathbf{z}$ في S بحيث إن $z_1 = \mu$.

7 - أثبت أن E^1 فئة جزئية مترابطة من نفسها. (استعن بنظرية قطع ديديكند تمرين 1.3.14).

8 - أثبت أنه إذا كانت S فئة مترابطة في E^1، فإن S تحقق «خاصية القيمة الوسطى» التالية: إذا كان a, b عددين، فإن S تحتوي كل عدد بين a, b.

9 - أثبت أنه إذا كانت S فئة جزئية مترابطة من E^1، فإن S فترة.

10 - أثبت صحة النص التالي أو عدم صحته: في E^2 يكون تقاطع الفئات المترابطة فئة مترابطة.

11 - أثبت صحة النص التالي أو عدم صحته: في E^1 يكون تقاطع الفئات المترابطة فئة مترابطة.

12 - نفرض أن $\mathbb{Q}^2$ هو الفئة الجزئية من E^2 المتكونة من تلك النقط $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ بحيث إن كلا من x_1, x_2 يكون عدداً قياسياً. فهل $\mathbb{Q}^2$ فئة مترابطة؟

متتالية النقط هي دالة من الأعداد الصحيحة الموجبة إلى - في الفضاء المتري X، أي هي متتالية حدودها النقط في X. وحيث إن أمثلتنا الرئيسية على الفضاءات المترية هي الفضاءات الاقليدية، ونحن نستخدم الأدلة التحتية لتمييز إحداثيات النقط في E^n فإننا نستعين بالأدلة الفوقية للإشارة إلى حدود متتاليات النقط $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$.

تعريف 13.9:

متتالية النقط $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ تسمى تقاربية إلى النقطة p في X إذا كان لكل عدد ε موجب يوجد عدد N بحيث إن:

$$x^{(k)} \in N_\varepsilon(p) \quad \text{طالما كان} \quad k > N.$$

ويرمز لذلك بالرمز $\lim_k x^{(k)} = p$

وهدفنا الأول هو تعيين الارتباط بين متتاليات النقط التقاربية ونقط نهايات الكرة المفتوحة الواردة في بند 13.3.

نظرية 13.7:

النقطة p نقطة نهاية لفئة النقط A إذا وفقط إذا كان هناك متتالية نقط غير متكررة في A تتقارب إلى p.

البرهان:

أولاً نفرض أن p نقطة نهاية للفئة A. عندئذٍ تحتوي الكرة $N_1(p)$ على نقطة $x^{(1)}$ من A تختلف عن p. نفرض أن $r(2) = \min\left\{\frac{1}{2} \text{ و } d(x^{(1)}, p)\right\}$، ونختار $x^{(2)}$ من $A \sim \{p\}$ في الكرة $N_{r(2)}(p)$. ونستمر في هذه العملية، وبعد ذلك نكون قد عرّفنا $x^{(k)}$ ، ... ، $x^{(1)}$. نفرض أن:

$$r(k+1) = \min\left\{\frac{1}{(k+1)} \quad \text{و} \quad d(x^{(k)}, p)\right\}$$

ونختار $x^{(k+1)}$ كنقطة من $A \sim \{p\}$ من الكرة $N_{r(k+1)}(p)$. وحيث إن

$r(k) \leqslant \frac{1}{k}$ ، من الــواضـح أن $\lim_k x^{(k)} = p$ ، وحيث إن $r(k) \leqslant d(x^{(k-1)}, p)$ ينتج أنه لا توجد نقطتان $x^{(k)}$ مكررتان. ولإثبات العكس نلاحظ ببسـاطة أنـه إذا كانت A تحتوي متتالية نقط تقاربيـة إلى p فإنـه من الواضـح من التعريف 13.9 أن كـل كرة مفتـوحة حول p تحتوي عدداً لانهائياً من نقط A.

لاحظ أنه من الضروري أن نشترط أن تكون متتالية النقط في النظرية 13.7 غير متكررة. على سبيل المثال المتتالية الثابتة حيث $x^{(k)} = p$ بالتأكيـد تقاربيـة الى p، ولكن الفئة المفـردة $\{p\}$ ليس لها p كنقطة نهاية.

وفي النظرية التالية نثبت ارتبـاطاً قـوياً بـين متتاليـات النقط التقاربيـة في E^n، والمتتاليـات العددية التقاربية، وبالتحديد: أن تقارب $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ يكـافىء أن تكون كـل متتاليـة من متتاليات الاحداثيات (العددية) تقاربية.

نظرية 13.8:

في E^n تتقارب متتالية النقط $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ إلى p إذا وفقط إذا كانت:

$$\lim_k x_i^{(k)} = p \,, i = 1, \ldots, n \quad \text{لكل } i \tag{1}$$

البرهان:

نلاحظ في البداية أن الجملة $\lim_k \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{p}$ يكافىء

$\lim_k d(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{p}) = 0$ لأن $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{p})$ إذا وفقط إذا كانت $d(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{p}) < \varepsilon$ ، وحيث إن:

$$d(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{p}) = \Big[\sum_{j=1}^{n} \left|x_i^{(k)} - p_j\right|^2\Big]^{1/2}$$

$$\geqslant \left|x_i^{(k)} - p_i\right| \;،\; (i = 1 ، \ldots ، n). \tag{2}$$

من الواضح أن $\lim_k d(\mathbf{x}^k, \mathbf{p}) = 0$ تؤدي إلى (1).

وبالعكس إذا تحققت (1) فإن المعادلة (2) والنظريتان 2.3 و 2.4 حـول التركيبـات الجبريـة لمتتاليات الأعداد التقاربية تسمح لنا باستنتاج أن $\lim_k d(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{p}) = 0$.

تعريف 13.10 :

متتالية النقط $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي في الفضاء المتري X إذا كان لكل عدد موجب ε يوجد N بحيث إن $d(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon$ طالما كانت $k > m > N$. من الواضح أن هذا التعريف تعميم لمفهوم متتالية كوشي العددية.

وبذلك فإن متتاليات كوشي للنقط في E^n يمكن تطابقها بدقة بالغة مع متتاليات كوشي العددية، وهو ما سنفعله في النظرية التالية :

نظرية 13.9 :

في E^n تكون متتالية النقط متتالية كوشي إذا وفقط إذا تقاربت إلى نقطة في E^n.

البرهان :

نفرض أن $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي.

وبما أن :

$$d(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(m)}) = \Big[\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^{(k)} - x_j^{(m)}\right|^2\Big]^{1/2}$$

$$\geqslant \left|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}\right| \ ، \ (i = 1 ، \dots ، n)$$

ينتج لكل $i = 1 ، \dots ، n$ أن الاحداثيات i، وهي $\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ تكوّن متتالية كوشي العددية. ومن النظرية 3.2 نعلم أن مثل هذه المتتاليات تتقارب إلى نهاية في $\mathbb{R}$، ولتكن $\lim_k x_i^{(k)} = p_i$. والآن تضمن لنا النظرية 13.8 أن متتالية النقط $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ تتقارب إلى $\mathbf{p} = \{p_1 ، \dots ، p_n\}$ في E^n. والعكس صحيح في أي فضاء متري، ولذلك نقدمه في النظرية التالية:

نظرية 13.10 :

إذا كانت $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية تقاربية في الفضاء المتري X، عندئذ فإن $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية كوشي.

البرهان:

نفرض أن $\lim_k x^{(k)} = p$ ونفرض أن $\varepsilon > 0$. ونختار N بحيث يكون:

$$d(x^{(k)}, p) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{طالما كان} \quad k > N. \tag{3}$$

وبذلك فعندما يكون كل من k, m أكبر من N نستعين بالمتباينة المثلثية والمتباينة (3) لنحصل على:

$$d(x^{(k)}, x^{(m)}) \leqslant d(x^{(k)}, p) + d(p, x^{(m)})$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ومن ثم فإن $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي.

وعند هذه النقطة قد يتساءل البعض «لماذا لا نثبت جزئي النظرية 13.9 لفضاء متري عام X، وعندئذٍ تصبح النظرية 13.9 مثالاً على نتيجة أكثر عمومية؟ والسبب يكمن في أنه ليس من الضروري للفضاءات المترية العامة أن تتقارب كل متتالية كوشي. والشيء الدقيق في الموضوع يكمن في أننا عندما نقول: إن متتالية النقط تتقارب فإن هناك مطلباً ضمنياً لا نقوله وهو أن هناك نقطة في الفضاء تتقارب إليها المتتالية. إن نقطة النهاية المطلوبة هذه هي التي تسبب الصعوبة في بعض الفضاءات المترية. فكما نرى في المفترض 13.1 فإنه يمكن أن نكوّن فضاءً مترياً جديداً بإزالة النقطة p من الفضاء المعطى، لنقل مثلاً:

$$Y = X \sim \{p\}.$$

والآن نفرض أن النقطة p كانت هي نهاية المتتالية $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ المكوّنة من النقط غير المساوية p. عندئذ فإن $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ هي متتالية في كلا الفضائين X, Y، وهي تتقارب في X، ولذا وفقاً للنظرية 13.10 هي متتالية كوشي في X. ودالة البعد d هي نفسها في X كما في Y؛ ولذا فإن $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ هي أيضاً متتالية كوشي في Y. ولكن في Y لا توجد نقطة تتقارب إليها $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$؛ لأن p قد أزيلت ولأنّ نهايات المتتاليات وحيدة (انظر تمرين 13.5.6). وهذه الفكرة هي المبدأ العام وراء المثالين التاليين.

مثـال 13.12:

نفرض أن X هي الكرة $N_1(0)$ في E^2 بدالة البعد الاقليدي المعتادة d. ندرس في

$N_1(\mathbf{0})$ متتالية تتقارب إلى نقطة على الحدود، مثلاً $\mathbf{x}^{(k)} = \left(1 - \frac{1}{k} ، 0\right)$ ، ومن ثم فإن $\lim_k \mathbf{x}^{(k)} = (1, 0)$. عندئذٍ فإن $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي في X (تماماً كما في E^2)، ولكنه لا توجد لها نهاية في X ولذا فهي غير تقاربية في X.

مثـال 13.13 :

نفرض أن $\mathbb{Q}^n$ فئة جزئية من E^n تتكون من كل النقاط x حيث تكون إحداثياتها $x_1 ، ... ، x_n$ أعداداً قياسية (قارن مع تمرين 13.3.12). والنقطة $\mathbf{p}\left(\sqrt{2} ، 0 ، ... ، 0\right)$ هي في $E^n \sim \mathbb{Q}^n$ ، ولكن $\left\{r_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ هي متتالية من الأعداد القياسية بحيث إن $\lim_k r_k = \sqrt{2}$ و $\mathbf{x}^{(k)} = (r_k ، 0 ، ... ، 0)$ ، عندئذ فإن $\lim_k \mathbf{x}_k = \mathbf{p}$ وبذلك تكون $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية كوشي ولكنها لا تتقارب في $\mathbb{Q}^n$.

وفي بند 13.6 نقابل بعض الخواص التي تؤدي إلى تقارب متتاليات كوشي. ولكننا الآن نثبت فقط إحدى الخواص التي تصدق لمتتاليات كوشي في كل الفضاءات المترية.

تعريف 13.11 :

المتتالية $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ في X محدودة (bounded) إذا وجدت كرة $N_r(x)$ تحتوي كل نقطة $x^{(k)}$ من المتتالية.

نظرية 13.11 :

إذا كانت $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية كوشي في X فإنها محدودة.

البرهان :

نفرض أن $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي ونطبّق التعريف 13.10 بـ $\varepsilon = 1$. وبذلك يوجد العدد N بحيث يكون:

$d(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(m)}) < 1$ طالما أن $k > m > N$.

وكحالةٍ خاصة، إذا كان $m = N + 1$ تصبح هذه الخاصية:

$d(x^{(k)}, x^{(N+1)}) < 1$ طالما أن $k > N$.

ولذا فكل النقط $x^{(k)}$ لـ $k > N$ تقع في الكرة $N_1(x^{(N+1)})$. والآن نكبّر ببساطة نصف قطر الكرة حتى تحتوي هي أيضاً النقط N الأولى من المتتالية. نعرّف

$$r = 1 + \max \left\{ 1 ، d(x^{(1)} ، x^{N+1)}) ، \ldots ، d(x^{(N)}, x^{(N+1)}) \right\}$$

وبذلك فإن r هي على الأقل أكبر بوحدة واحدة من البعد بين $x^{(N+1)}$ ، $x^{(k)}$ لكل $k = 1, 2, \ldots$ ، ولذا تحتوي $N_r(x^{(n+1)})$ كل نقطة $x^{(k)}$ من نقط المتتالية.

تمارين 13.5

في التمارين 1-5 تكون متتالية النقط $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ في E^2. عيِّن ما إذا كانت تقاربية أم لا، وإذا كانت تقاربية عين نهايتها.

1 - $\mathbf{x}^{(k)} = \left(\frac{k-1}{k} ، \frac{k+1}{k} \right).$

2 - $\mathbf{x}^{(k)} = \left(\frac{1}{k} ، \frac{k}{2^k} \right).$

3 - $\mathbf{x}^{(k)} = \left(\frac{1}{k} ، \sin \pi k \right).$

4 - $\mathbf{x}^{(k)} = \left(\frac{1}{k} ، k \right).$

5 - $\mathbf{x}^{(k)} = \left(k \sin \frac{1}{k} ، \frac{k^2 - 1}{2k^2 - 1} \right).$

6 - أثبت أن نهاية المتتالية التقاربية في الفضاء المتري X وحيدة، بإثبات أنه إذا كانت: $\lim_k x^{(k)} = p$ ، $\lim_k x^{(k)} = q$ فإن $p = q$.

7 - نفرض أن $X = E^n$ ، وأن $d^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_i - y_i|$ ، أثبت أن $\lim_k \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{p}$ في $\{E^n, d^*\}$،
إذا وفقط إذا كان $\lim_k x_i^{(k)} = p_i$ لـ $i = 1 ، \ldots ، n$.

8 ـ نفرض أن X هي الفترة $(0, 1)$ في E^1 ، بدالة البعد المعتادة $d(x, y) = |x - y|$. عيّن متتالية كوشي في X والتي لا تتقارب في X.

9 ـ نفرض أن X فئة جزئية من E^1 تتكوّن من اتحاد الفترات المغلقة:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2k} ، \frac{1}{2k-1} \right].$$

عين متتالية كوشي في X لا تتقارب في X.

10 ـ أثبت أنه في E^n تكون المتتالية $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ محدودة إذا وفقط إذا كان كل من متتاليات الإحداثيات $\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية عددية محدودة.

Completeness of E^n 13.6 كمال E^n

درسنا في الباب الثالث بالتفصيل علاقة المتتالية التقاربية بمتتاليات كوشي في $\mathbb{R}$. وحيث إن $\mathbb{R}$ هو بالضبط الحالة أحادية البعد من E^n، فمن المعقول أن نحدس أن نظرية الكمال تتحقق في E^n كما في $\mathbb{R}$. وفي البداية نعرّف كمال E^n.

تعريف 13.12:

الفضاء المتري X يسمى كاملاً (complete) إذا كانت كل متتالية كوشي في X تتقارب إلى نقطة في X.

وبمصطلحات التعريف 13.12 يكون E^n فضاءً كاملاً وفقاً للنظرية 13.9. وتعطي النظرية التالية أربع من الخواص البديلة التي تكافىء الكمال في E^n. وتعتبر كل منها نتيجة هامة بحد ذاتها، وتشكل هذه الخواص معاً أهم أداة في التحليل. ومن السهل التعرف عليها مباشرة بوصفها التعميمات متعددة الأبعاد للنظريات الأربع الواردة في الباب الثالث.

نظرية 13.12:

كل من المقولات الخمس التالية صحيحة وتكافىء كل منها الأخرى.

(i) E^n كامل.

(ii) خاصية هاين ـ بوريل. إذا كانت F فئة مغلقة ومحدودة في E^n و $\mu \in M$ $\{A_\mu\}$ تجمعاً من الفئات المفتوحة التي يحتوي اتحادها F، فإنه يوجد تجمّع جزئي نهائي

$$A_{\mu(1)} ، A_{\mu(2)} ، \dots ، A_{\mu(m)} .$$

بحيث إن $$F \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_{\mu(i)}$$

(iii) خاصية بولتزانو ـ ڤيرشتراس: إذا كانت S فئة لانهائية محدودة في E^n، فإنه توجد لها نقطة نهاية في E^n.

(iv) خاصية المتتالية المحدودة: إذا كانت $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية نقط محدودة في E^n، فإنه يكون لها متتالية جزئية تقاربية.

(v) خاصية التداخل (Nested set property) للفئات:

إذا كانت $\left\{F_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية من الفئات غير الخالية المغلقة المحدودة بحيث إنه لكل k يكون $F_{k+1} \subseteq F_k \subseteq E^n$ ، عندئذٍ فإن:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset.$$

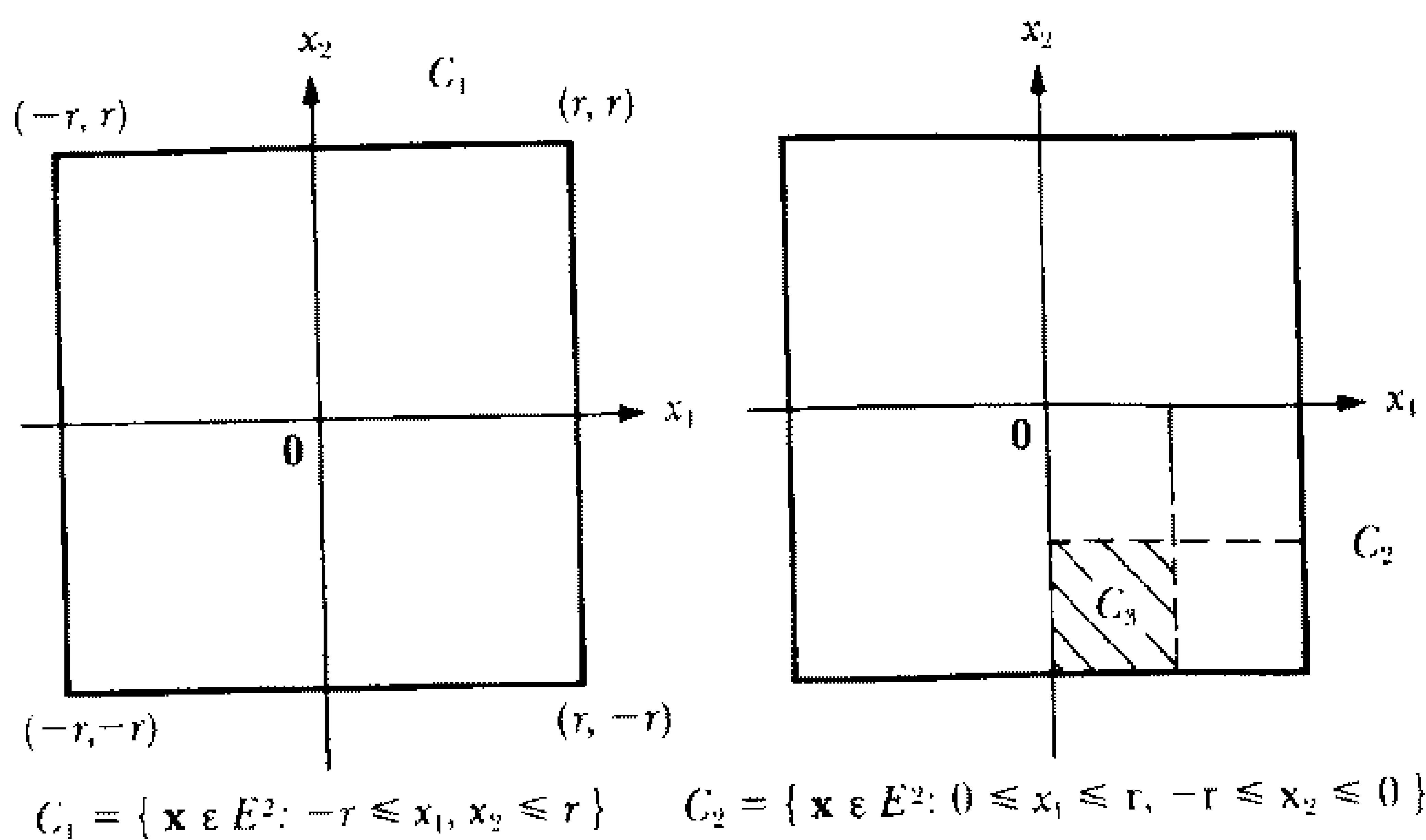
البرهان:

لإثبات تكافؤ هذه الخواص نثبت أن كلاً من المقولات الأربع الأولى تؤدي إلى المقولة التالية لها، وأن (v) تؤدي إلى (i). وكما لاحظنا أعلاه فإن (i) قد أثبتت بالفعل بوصفها النظرية 13.9، ولذا فإن تكافؤ المقولات الخمس سيؤدي (يتضمن) إلى أنها كلها صحيحة.

وتتعلق المقولات (ii-v) بالفئات المحدودة. ومن المناسب أن نستخدم صورة أخرى للمحدودية تكافىء التعريف 13.11. ونشير إلى أن الفئة S محدودة في E^n إذا وفقط إذا كانت محتواة في مكعب ـ n (مكعب نوني):

$$S \subseteq C = \left\{x \in E^n : |x_i| \leqslant r,\ i = 1 ، \dots ، n\right\}$$

ويطلب برهان هذا التأكيد في تمرين 13.6.1. وحيث إن التضمين الأول يتطلب أكثر البراهين تعقيداً، فإنه من المفيد أن نتمعن الرسم في E^2 كما هو موضح في شكل 13.5.



شكل (13.5)

(i) تؤدي إلى (ii): نفرض أن F فئة مغلقة ومحدودة، ونفرض أن $\{A_\mu\}_{\mu \in M}$ مُعط كـ: «غطاء مفتوح للفئة F» كما في (ii). وحيث إن F محدودة فإنه يوجد مكعب ـ n (نوني) C_1 يحتوي على F. نفرض أن F لا يمكن أن تُعطى بأي عدد نهائي من الـ A_μ. وبتجزئة C_1 إلى 2^n من المكعبات النونية بتنصيف كل فترة من الفترات الاحداثية لـ C_1، أي أن الاحداثي i للنقطة x في احدى المكعبات ـ n يكون مقيداً إلى $[0 ، r]$ أو إلى $[-r ، 0]$ بدلاً من $[-r ، r]$.

وإذا كان من الممكن تغطية تلك الأجزاء من F والتي تقع في كل واحد من الـ 2^n مكعب نوني بعدد كبير محدود من الـ A_μ، لظلّ عندئذٍ اتحاد كل هذه الـ A_μ عدداً نهائياً وسيغطي F. وبذلك فإن أحد هذه الـ 2^n من المكعبات ـ n يجب أن يحتوي على فئة جزئية من F لا يمكن أن تُغطى بأي عدد نهائي من الـ A_μ.

ونسمي هذا المكعب C_2. والآن نجزىء C_2 إلى 2^n من المكعبات ـ n ونعيد الكرّة مرات عديدة لانهائية. في النتيجة نحصل على متتالية من n- مكعبات بحيث يكون $C_{k+1} \subset C_k$ والاحداثي i لكل نقطة في C_k مقيداً بفترة طولها $\frac{r}{2^{k-2}}$. نختار متتالية نقط $\{x^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث يكون $x^{(k)}$ في $F \cap C_k$. عندئذٍ تكوّن متتالية الاحداثيات i متتالية

ـوشي العددية، مما يؤدي كما في نظريتي 13.9 و 13.8 إلى أن $\{x^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية ـوشي. وبفرض صحة (i) نستنتج أنه توجد نقطة **p** بحيث إن $\lim_k x^{(k)} = p$. وحيث إن ـل $x^{(k)}$ في F و F مغلقة نجد أن $p \in F$. وبذلك تكون **p** في إحدى الـ A_μ ، ولتكن ـثلا $p \in A_p$. ولكن A_p مفتوحة ولذا فلبعض r' يكون $p \in N_{r'}(p) \subset A_p$ مما يعني ـن $N_{r'}(p)$ تحتوي كل المكعبات النونية C_k فيما عدا عدداً محدوداً منها. ولكن ذلك يعني ـن نقط F في كل هذه الـ C_k تكون محتواة في احدى الفئات المفتوحة وهي بالذات A_p، وهذا يتناقض مع اختيار C_k.

(ii) تؤدي إلى (iii): نفرض أن S فئة محدودة وليست ذات نقطة نهائية (سنثبت أن S يجب ـن تكون نهائية مما يثبت (iii) .) نفرض أن $\overline{N}$ كرة مغلقة (ومحدودة) تحتوي على S، وحيث ـنه لا توجد نقطة في **N** تكون نقطة نهاية لـ S، فإنه يمكننا أن نختار كرة $N_{r(p)}(p)$ لكل **p** في $\overline{N}$ بحيث إن $N_{r(p)}(p)$ لا تحتوي على نقط من S ربما فيما عدا **p** نفسها. والآن فإن $\overline{N} \subset \bigcup_{p\in S} N_{r(p)}(p)$ ، ولذا فإن $\{N_{r(p)}(p) : p \in S\}$ هو تجمع (collection) من الفئات المفتوحة التي يحتوي اتحادها على $\overline{N}$. وبذلك فمن (ii) نستنتج أنه يوجد تجمع جزئي نهائي من هذه الكرات تغطي $\overline{N}$ ، ولكن هذا التجمع الجزئي يجب أيضاً أن يغطي S (لأن $S \subseteq \overline{N}$)، وبما أنّ كل كرة تحتوي على الأكثر نقطة واحدة من S، نستنتج أن S نهائية.

(iii) تؤدي إلى (iv): نفرض أن $\{x^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية نقط محدودة وأن S مدى هذه المتتالية، أي أن $S = \{p \in E^n : p = x^{(k)}\}$ وذلك لبعض **k**.

وإذا كانت S فئة نهائية فإن نقطة واحدة على الأقل من نقطها يجب أن تظهر عدداً لانهائياً من المرات كحد في المتتالية، وفي هذه الحالة يكون لـ $\{x^{(k)}\}_{k=1}$ متتالية جزئية ثابتة. إذا كان لـ S عدد لانهائي من النقط فإن (iii) تؤدي إلى أن S لها نقطة نهاية، وفي نظرية 13.7 بيّنا كيف نُكوّن متتالية في S تقاربية إلى نقطة النهاية هذه.

(iv) تؤدي إلى (v): نفرض أن $\{F_k\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من فئات متداخلة (Nested) مغلقة

محدودة كما في فرضية (v). ولكل k نختار نقطة $x^{(k)}$ في F_k . وكل نقطة من هذه النقط تكون في F_1، ولذا فإن $\{x_{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة. ومن (iv) يكون للمتتالية $\{x^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية تقاربية نرمز لنهاياتها هنا بالحرف **p**.

ونرى أن خاصية التداخل للفئات تضمن أن تحتوي كل F_k على النقط $x^{(k)}$ ربما فيما عدا عدد محدود من هذه النقط. وبذلك فلكل k توجد متتالية من النقط في F_k تقاربية إلى **p**. وحيث إنها فئات مغلقة، فإن **p** يجب أن تنتمي إلى كل F_k. ومن ثم فإن $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ تحتوي **p**، ومن ثم فالتقاطع غير خالٍ.

(v) تؤدي إلى (i): نفرض أن $\{x^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية كوشي ولكل m، نعرّف F_m ليكون انغلاق (closure) فئة النقط $\{x^{(k)} : k \geqslant m\}$. وبذلك فإن $\{F_m\}$ هي متتالية متداخلة من فئات مغلقة. ووفقاً للنظرية 13.11 تكون $\{x^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة، وبالتالي تكون F_1 محدودة. ووفقاً لـ (v) توجد نقطة **p** منتمية إلى كل فئة من F_m . نفرض أن $N_\varepsilon(p)$ أية كرة حول **p**، ونختار عدداً N بحيث إن $k > m > N$ تؤدي إلى أن $d(x^{(k)}, x^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}$. وحيث إن **p** في F_N الذي يكون انغلاقاً للمتتالية الجزئية $\{x^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ فإنه توجد نقطة ما $x^{(m)}$ ، حيث $m > N$ بحيث تكون $x^{(m)}$ في $N_{\varepsilon/2}(p)$. والآن إذا كان $k > N$ ، فإن:

$$
\begin{aligned}
d(x^{(k)}, p) &< d(x^{(k)}, x^{(m)}) + d(x^{(m)}, p) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

ومن ثم فإن $\lim_k x^{(k)} = p$.

وعند فحص برهان النظرية 13.12، نجد أن علاقة البعد الاقليدي قد استخدمت فقط في اثبات أن (i) تؤدي إلى (ii). وبذلك نستنتج أن التضمينات الأربعة الأخرى تتحقق لأي فضاء متري. وبالطبع فإن حقيقة أن كل المقولات الخمس صحيحة في E^n تعتمد تماماً على علاقة البعد. وقد احتجنا إلى ذلك لإثبات النظرية 13.9 التي أعطتنا صحة (i).

واستخدام علاقة البعد لإثبات أن (i) تؤدي إلى (ii) أمر دقيق للغاية، فهو متضمن في صلب تعريفات المحدودية والمكعبات ـ n (النونية) التي استخدمناها. وليس من الضروري لدراسة E^n أن نورد مناقشة كاملة للظروف التي يؤدي فيها الكمال إلى خاصية هاين ـ بوريل؛ لذا فلن نحاول ذلك هنا. ومع ذلك نورد نقاشاً مختصراً لفضاءين متريين لا يحققان خاصية هاين ـ بوريل. الأول هو الفضاء الوارد في المثال 13.4.

مثال 13.14:

نفرض أن X فئة لانهائية وتُعرَّف d بالعلاقة:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 \quad ، \quad x \neq y \\ 0 \quad ، \quad x = y \end{cases}$$

وبما أنّ كل نقطة من X يمكن كتابتها كما يلي: $\{x\} = \mathbf{N}_{1/2}(x),$

نرى أن كل فئة مفردة هي فئة مفتوحة في X. وأيضاً $X = \mathbf{N}_2(x)$ لأي $x \in X$، ولذا فإن X محدودة. وبالتالي فإن X هي فئة مغلقة محدودة، و $\bigcup_{x \in X} \{x\}$ غطاء مفتوح لـ X، حيث من الواضح أنه لا يمكن أن يؤول إلى عدد محدود من الفئات المفتوحة. والآن نؤكد أن X كاملة؛ لأنه ليس من الصعب أن نبين أنه إذا كانت $\left\{x^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية كوشي، فإنه يوجد عدد N بحيث إن $x^{(k)} = x^{(N)}$ حينما يكون $k \geqslant N$ (تمرين 13.6.3). وبذلك فإن $\lim_k x^{(k)} = x^{(N)}$، ومن ثم فإن X كاملة ورغم ذلك فلا تتحقق خاصية هاين بوريل.

وليس من العسير إعطاء مثال على فضاء متري تكون فيه كل المقولات الخمس خطأ (غير متحققة). وبدلاً من تغيير علاقة البعد يكون من الأسهل تغيير فئة النقط بإزالة نقطة منها.

مثال 13.15:

نفرض أن X ترمز إلى $E^n \sim \{\mathbf{p}\}$ مكملة الفئة المفردة $\{\mathbf{p}\}$، ونفرض أن البعد بين النقط في X هو نفسه البعد الاقليدي كما في E^n. والآن إذا كانت $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية تقاربية إلى $\mathbf{p}$ في E^n، و $\mathbf{x}^{(k)} \neq \mathbf{p}$ فإنها تظل متتالية كوشي في X.

ولكن بما أنّه لا توجد نقطة (في X) تتقارب إليها فإن المتتالية $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ غير تقاربية في X. ولذا فإن X ليست كاملة. وحيث إن الكمال متضمن في المقولات الأربعة الأخرى، نستنتج أن المقولات الخمس خاطئة (لا تتحقق).

تمارين 13.6

1 ـ أثبت أنّ A فئة محدودة في E^n إذا وفقط إذا وُجِد مكعب ـ n يحتوي A.

2 ـ أثبت أنه في الفضاء المتري الوارد في المثال 13.14 كل فئة جزئية من X تكون مغلقة.

3 ـ أثبت أنه في الفضاء المتري الوارد في المثال 13.14 كل متتالية كوشي هي في النهاية ثابتة: أي يوجد ذلك العدد N بحيث أن $x^{(k)} = x^{(N)}$ عندما $k \geqslant N$.

4 ـ أعط مثالاً لمتتالية ـ من الفئات المتداخلة في E^2 ـ محدودة غير خالية وذات تقاطع خالي. (لا يمكن بالطبع أن تكون الفئات مغلقة، أنظر النظرية 13.12).

5 ـ أعط مثالاً لمتتالية في E^2 من فئات متداخلة غير خالية ومغلقة ذات تقاطع خالي.

6 ـ أعط مثالاً في فضاء متري عام X من النوع المطلوب في تمرين 5.

7 ـ إذا كانت S فئة لا محدودة في الفضاء المتري X، بيِّن أن S لا يمكن أن تكون لها خاصية هاين-بوريل، أي كوّن تجمعاً $\mathscr{G}$ من فئات مفتوحة تغطي S بحيث لا يغطي أي تجمع جزئي نهائي من $\mathscr{G}$ الفئة S.

8 ـ أثبت أنه لفضاء متري اختياري إذا كانت الفئة S غير مغلقة فلا يمكن أن تكون لها خاصية هاين - بوريل (انظر تمرين 7).

13.7 الفئات الجزئية الكثيفة للفضاء E^n

(Dense Subsets of E^n)

يعتمد هذا البند اعتماداً كبيراً على مفهوم الفئات القابلة للعد (Countable set) التي تناقش في الملحق B.

ومن المفيد مراجعة هذا الموضوع قبل الشروع في دراسة هذا البند.

تعريف 13.13 :

تسمى فئة النقط D كثيفة (dense) في الفضاء المتري X إذا كانت كل كرة مفتوحة في X تحتوي نقطة من D.

وكأمثلة نعود فوراً إلى E^n (انظر أيضاً تمارين 13.7.1-13.7.3).

مثال 13.16 :

نفرض أن $\mathbb{Q}^n$ هي الفئة الجزئية من E^n المتكونة من تلك النقط **q** بحيث تكون إحداثياتها q_i أعداداً قياسية. عندئذٍ تكون $\mathbb{Q}^n$ فئة جزئية من E^n قابلة للعد وكثيفة. وحقيقة كون $\mathbb{Q}^n$ قابلة للعد يمكن استنتاجها من قابلية عد $\mathbb{Q}$ فئة الأعداد القياسية (انظر نظرية B1 في الملحق B). ولكي نبين أن $\mathbb{Q}^n$ كثيفة في E^n، فإننا نفرض أن $N_{\varepsilon(p)}(\mathbf{p})$ أية كرة ونستعين بكثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ لاختيار الأعداد القياسية q_n ... ، q_1 . بحيث يكون :

$$|p_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, (i = 1 ، \dots ، n)$$

عندئذٍ فإن :

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = [\sum_{i=0}^{n} |\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_i|^2]^{1/2} \quad = \left[n\left(\frac{\varepsilon^2}{n}\right)\right]^{1/2} = \varepsilon.$$

وبذلك فإن النقطة **q** هي في $\mathbb{Q}^n \cap N_\varepsilon(\mathbf{p})$

نظرية 13.13:

يوجد تجمّع (Collection) قابل للعدد $\mathfrak{B}$ من الكرات المفتوحة في E^n، بحيث يمكن التعبير عن أية فئة مفتوحة في E^n كاتحاد لتجمع جزئي ما من $\mathfrak{B}$.

البرهان:

نفرض أن $\mathfrak{B}$ هي تجمع من الكرات يتكون من كل الكرات $N_r(q)$ بحيث يكون r عدداً قياسياً، و q في $\mathbb{Q}^n$. ولفئة مفتوحة معطاة A، ندرس التجمع الجزئي $\mathfrak{B}_A$ المتكون من تلك الكرات بحيث إن $N_r(q) \subseteq A$. ومن الواضح أن اتحادها محتوى في A، ويكون التجمع قابلاً للعد؛ لأن كلاً من $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}^n$ قابل للعد. وبذلك يتبقى فقط أن نبين أن A محتواة في اتحاد هذا التجمع. إذا كانت x نقطة في الفئة المفتوحة A، عندئذٍ فهناك كرة حول x بنصف قطر قياسي (rational) r بحيث إن $N_r(x) \subset A$.

وحيث إن $\mathbb{Q}^n$ كثيفة، فإنه توجد نقطة q في $N_{r/2}(x)$. عندئذٍ تكون x في $N_{r/2}(q)$، ويكون $N_{r/2}(q)$ في $\mathfrak{B}_A$؛ لأنه محتوى في $N_r(x)$ التي تقع في A.

وهذا التأكيد الأخير يمكن التحقق منه بملاحظة أنه إذا كان y في $N_{r/2}(q)$ فإن

$$d(x, y) \leq d(x, q) + d(q, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

وقد بيّنا أن نقطة اختيارية x في A محتواة في كرة ما من $\mathfrak{B}_A$؛ ولذا فإن A محتواة في اتحاد كل الكرات في $\mathfrak{B}_A$.

ونختتم هذا الباب بنظرية على جانب كبير من العمومية تجمع بين مفاهيم الفئات المفتوحة والكثيفة القابلة للعد. ويجب أن تقارن هذه النظرية بخاصية هاين - بوريل؛ لأن كلاً منهما تتعلق بغطاء مفتوح لفئة.

نظرية 13.14 خاصية ليبيج Lebesgue Property:

إذا كانت D أية فئة في E^n و $\{A_\mu\}_{\mu \in M}$ تجمعاً من الفئات المفتوحة التي يحتوي اتحادها

على D فإنه يوجد تجمع جزئي قابل للعد $\{A_\mu\}_{k=1}^{\infty}$ يحتوي اتحاده على D.

البرهان:

وفقاً لنظرية 13.13 يمكن كتابة كل من الفئات المفتوحة A_μ كاتحاد لكل الكرات حول نقط $\mathbb{Q}^n$ التي تكون ذات أنصاف أقطار قياسية وتكون محتواة في A_μ. وليكن $A_\mu = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{r(k)}^\mu$. وكل نقطة x في D هي في $N_{r(k)}^\mu$ ما، التي تشكل فئة جزئية من A_μ. ولكل كرة $N_{r(k)}^\mu$ نختار إحدى A_μ التي تحتوي $N_{r(k)}^\mu$ ونسميها $A_{r(k)}^\mu$. والتجمع الجزئي لكل مثل هذه الفئات $A_{r(k)}^\mu$ قابل للعد لأنه يوجد (على الأكثر) فئة واحدة $A_{r(k)}^\mu$ لكل $N_{r(k)}^\mu$. وأيضاً يكون اتحاد هذه التجمعات الجزئية محتويا اتحاد الـ $N_{r(k)}^\mu$ الذي يحتوي في آخر المطاف على D. ومن ثم فهناك تجمع جزئي من $\{A_\mu\}_{\mu\in M}$ قابل للعد يحتوي اتحاده على D.

لاحظ أن فرضيات النظرية 13.14 لا تضع أية قيود على الفئة D. وهنا تكمن قوة وعمومية هذه النتيجة، فهي تطبق على أية فئة جزئية D من E^n. وإذا أعطي بالإضافة أن D مغلقة ومحدودة فإن التجمع الجزئي الناتج من خاصية ليبيج(*) يمكن أن يتحول إلى تجمع جزئي نهائي حيث يبقى اتحاده محتوياً على D.

تمارين 13.7

1- أثبت أن D كثيفة في E^n، حيث

$$D = \{x \in E^n : x_i \in \mathbb{R} \sim \mathbb{Q} \text{ ، } i = 1 \text{ ، } \dots \text{ ، } n\}.$$

2 - أثبت أن D كثيفة في E^2، حيث:

$$D = \{x \in E^2 : x_1 \in \mathbb{Q} \text{ ، } x_2 \in \mathbb{R} \sim \mathbb{Q}\}.$$

(*) ليبيج (هنري ليون) (1875-1941) عالم رياضيات فرنسي. (ملاحظة المترجم)

3 ـ أثبت أن D كثيفة في المكعب ـ 2

$$C = \{x \in E^2 : -1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1\},$$

حيث:

$$D = \{x \in C : x_1 \in \mathbb{Q}\}.$$

4 ـ أثبت: إذا كانت D فئة نقط غير قابلة للعد في E^n ، فإن D لها نقطة نهاية في E^n (ملاحظة: هذا التأكيد يجب مقارنته بخاصية بولتزانو ڤيرشتراس ـ النظرية 13.12 (iii). وهنا لا يلزم أن تكون D محدودة، ورغم ذلك نضمن وجود نقطة نهاية لـ D ببساطة؛ لأنه يوجد لها عناصر كثيرة جداً).

5 ـ أثبت: إذا كانت D فئة نقط غير قابلة للعد في E^n ، فإن D تحتوي احدى نقط نهاياتها.

6 ـ أثبت أنه إذا كانت D فئة نقط غير قابلة للعد في E^n ، فإن كل نقط D فيما عدا عدد محدود من نقطها تكون نقط نهايات لـ D.

الفصل الرابع عشر

14

التحويلات المتصلة

Continuous Transformations

14.1 التحويلات والدوال

(Transformation and functions)

درسنا في الفصل الرابع الدوال المتصلة من E^1 إلى E^1 . وفي هذا الفصل، ولكي نتفادى الارتباك نستخدم مصطلح دالة عندما يكون المدى هو E^1 فقط. ونستخدم مصطلح تحويل Transformation أو راسم mapping للإشارة إلى دالة نطاقها فضاء متري metric space ومداها اما E^m $(m > 1)$ أو فضاء متري أكثر عمومية.

وندرس في حالات عدة أكثر من فضاء (فراغ) اقليدي بالأسلوب نفسه، لهذا السبب فإننا نرمز للبعد الاقليدي في E^n بالرمز d_n وفي E^m بالرمز d_m . . . والخ.

تعريف 14.1 :

إذا كان T تحويلاً من نطاق D في E^n إلى E^m ، فإن T متصل عند النقطة **p** في نطاقه D بشرط أنه إذا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد موجب δ حيث إن:

(1 أ) $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{p}) \cap D$ يؤدي إلى $T(\mathbf{x}) \in N_\varepsilon(T(\mathbf{p}))$؛

أي أن:

(1 ب) $\mathbf{x} \in D$ و $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < \delta$ يؤدي إلى $d_m(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{p})) < \varepsilon$.

إذا كان T متصلاً عند كل نقطة من نقط D، فإننا نقول بأن T متصل على D .

المنحني هو أداة مألوفة لتوضيح الدالة من E^1 إلى E^1. كـذلك تمثيـل الدالـة من E^2 إلى E^1 على السطح في فضاء الأبعاد الثـلاثة يمكن مـلاحظتـه في التفاضـل المتعدد التغـير. المثال التالي يساعد في توضيح رموزنا ومصطلحاتنا الحاضرة.

مثـــال 14.1:

الدالة f على E^2 والمعطاة:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

تُمثِّل كسطح في الفراغ ثلاثي الأبعاد بمخروط رأسه عند نقطة الأصل. (ارسم ذلك بيانياً لفهمه أحسن).

اتصالية f تتحقق بسهولة وذلك بملاحظة أن $f(\mathbf{x}) = d_2(\mathbf{x},\mathbf{0})$ ومن ذلك فإن:

$$d_1(f\mathbf{x}), f(\mathbf{p})) = |f\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})|$$
$$= |d_2(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - d_2(\mathbf{p}, \mathbf{0})| \leqslant d_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}),$$

وذلك بواسطة المتباينة المثلثية. إذن تعريف الاتصـال يتحقّق عند كل نقطة **p** من E^2.

لاحظ أن التعـريف 14.1 لا يحتاج إلى تحـويلاتٍ مشروطـة على E^n. السـطر (1 أ) يعطي معنى تـاماً حتى لـرواسم (mappings) نطاقهـا $\{X, d\}$ ومداهـا $\{Y, d\}$. في هذه الحـالـة بالطبع، فإن (1 ب) يستبدل بالآتي:

(1 ج) $x \in D$ و $d(x, p) < \delta$ يؤدي إلى $d^*(T(x) ، T(p)) < \varepsilon$

إنّ إحدى الطرق لانتاج أمثلة حول الرواسم هو استعمال الفئة نفسهـا من النقط لكل من X ، Y ومن ثمّ اعطاء كل منها دالة بُعْدٍ تختلف الواحدة عن الأخرى.

مثـــال 14.2:

إذا كـــانت $X = E^2$ مـع دالـــة البُعْـد المعتـــادة d_2، وإذا كـــانت $Y = E^2$ مـــع دالـة التاكسيكاب المترية Taxicab metric التالية:

$$d^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

فإننا نؤكد أن الراسم المحايد $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ كراسم من X إلى Y، متصلٌ عند كل نقطة من نقط X. فإن كان $\varepsilon > 0$ معطى، نختار $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ، فإنه لأي $\mathbf{p}$ في X، $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < \delta$ يؤدي إلى:

$$
\begin{aligned}
d^*(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{p})) &= \left|T(\mathbf{x})_1 - T(\mathbf{p})_1\right| + \left|T(\mathbf{x})_2 - T(\mathbf{p})_2\right| \\
&= |x_1 - p_1| + |x_2 - p_2| \\
&= \left[|x_1 - p_1|^2\right]^{1/2} + \left[|x_2 - p_2|^2\right]^{1/2} \\
&\leqslant \left[|x_1 - p_1|^2 + |x_2 - p_2|^2\right]^{1/2} \\
&\quad + \left[|x_1 - p_1|^2 + |x_2 - p_2|^2\right]^{1/2} \\
&= d_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + d_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \\
&< 2\delta \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

إذن T متصل عند $\mathbf{p}$.

إحدى أغرب النتائج للتعريف 14.1 تظهر عند النقطة في مجال الراسم التي لا تكون نقطة نهاية للنطاق. مثل هذه النقطة تسمى بالنقطة المعزولة Isolated point للنطاق. والحقيقة الغريبة هي أن الراسم يكون دائماً متصلاً عند مثل هذه النقطة. لتوضيح ذلك إذا كانت $\mathbf{p}$ نقطة معزولة في النطاق D للراسم T، فإنه توجد كرة $N_\delta(\mathbf{p})$ لا تحتوي على أي نقطة أخرى من D. باستخدام ذلك في (1 أ) نرى أن النقطة الوحيدة $\mathbf{x}$ والتي تحقق $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{p})$ و $\mathbf{x} \in D$ هي النقطة $\mathbf{p}$ وكذلك مع $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ فإنّ الاستنتاج (1 أ) صحيح لأي $\varepsilon > 0$.
إذن T متصل عند $\mathbf{p}$.

إنّ الظاهرة التي نوقشت في الفقرة السابقة يمكن أن تُرى في حالة متطرفة وذلك بأخذ نطاق مُكوّن كلياً من نقط معزولة. على مثل هذا النطاق يكون أي راسم متصلاً عند كل نقطة.

مثال 14.3:

لنفرض أن $X = \{\mathbf{x} \in E^2 : x_1 ، x_2 \in \mathbb{H}\}$ ولنفرض أن d_2 هي دالة البعد الاقليدية

المعروفة. تكون كل فئة من X نقطة معزولة؛ لأن $N_{1/2}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{p}\}$ لكل $\mathbf{p}$ في X. الآن نعرف الراسم على X بطريقة اختيارية بالكامل. لنقل:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{cases} (-1)^{x_1}\pi, & \text{إذا كان } x_2 \text{ زوجياً} , \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{x_2}\right), & \text{إذا كان } x_2 \text{ فردياً} ; \end{cases}$$

إذن حتى هذا الراسم متصل عند كل نقطة في X.

تمارين 14.1

1 ـ لنفرض أن f دالة على E^2 معطاة كالآتي: $f(\mathbf{x}) = |x_1 - x_2|$. بيِّن أن f متصلة على E^2.

2 ـ لنفرض أن f دالة على E^2 معطاة كالآتي: $f(\mathbf{x}) = x_1$ ، بيِّن أن f متصلة على E^2.

3 ـ لنفرض أن T تحويل من E^3 إلى E^2 مُعطى كالآتي: $T(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)$. بيِّن أن T متصل على E^3.

4 ـ لنفرض أن T تحويل من E^n إلى E^n معطى كالآتي:

$$T(\mathbf{x}) = (3x_1, 3x_2, \ldots, 3x_n).$$

برهن أن T متصل على E^n.

5 ـ لنفرض أن $\{Y, d^*\}$ ، $\{X, d_2\}$ فضاءين (فراغين) متريين كما في المثال 14.2 ولنفرض أن T راسم من Y إلى X معطى بـ $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ، بَيِّنْ أن T متصل على Y.

6 ـ عرِّف $D = \left\{\mathbf{x} \in E^2 : (x_1^2 + x_2^2)(x_1 - 1) \geqslant 0\right\}$ ولنفرض أن T تحويل من D إلى E_1 معطى بـ:

$$T(\mathbf{x}) = \sqrt{(x_1^2 + (x_2^2)(x_1 - 1)} .$$

بيِّن أن T متصل عند $\mathbf{0}$.

7 ـ إذا أعطيت $f(\mathbf{x}) = d_2(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ لكل $\mathbf{x}$ في $E^2 \sim \{\mathbf{0}\}$ ، فعرِّف $f(\mathbf{0})$ بحيث تكون f متصلة عند $\mathbf{0}$.

8 ـ لنفرض أن T راسم متصل من $\{X, d\}$ إلى $\{Y, d'\}$ ولنفرض أن T' راسم متصل من $\{Y, d'\}$ إلى $\{Z, d''\}$. برهن أن الراسم التراكبي (composite) والمعطى بـ $T'(T(\mathbf{x}))$ راسم من $\{X, d\}$ إلى $\{Z, d''\}$.

9 ـ برهن أنه إذا كان T تحويلاً من $\{X, d\}$ إلى $\{Y, d''\}$ متصل عند p، فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ حيث إن:

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{كلما كان} \quad x, y \in \mathbf{N}_\delta(p).$$

14.2 معيار الاتصال Criteria for continuity

نبرهن في هذا البند نظريتين يمكن باستخدامهما تحديد ما إذا كان التحويل المعطى متصل أم لا. أولى هاتين النتيجتين تطبق على التحويل المعرف على فئة مفتوحة. إذا كان نطاق التحويل المعطى فئة غير مفتوحة فإن هذه النظرية تظل صالحة لتحديد ما إذا كان هذا التحويل متصل داخل نطاقها أو أي فئة مفتوحة أخرى في هذا النطاق. أولاً نعرّف بعض المصطلحات والرموز.

تعريف 14.2:

لنفرض أن T تحويل من الفضاء المتري X إلى الفضاء المتري Y. إذا كانت $A \subseteq Y$ ، فإن الصورة العكسية للفئة A تحت تأثير الراسم T هي الفئة التالية التي نرمز لها بـ:

$$T^{-1}[A] = \{x \in X : T(x) \in A\}.$$

الطريقة السهلة لوصف الصورة العكسية $T^{-1}[A]$ هي أنها فئة كل النقط التي صورت بالراسم (بالاقتران) إلى A بواسطة T.

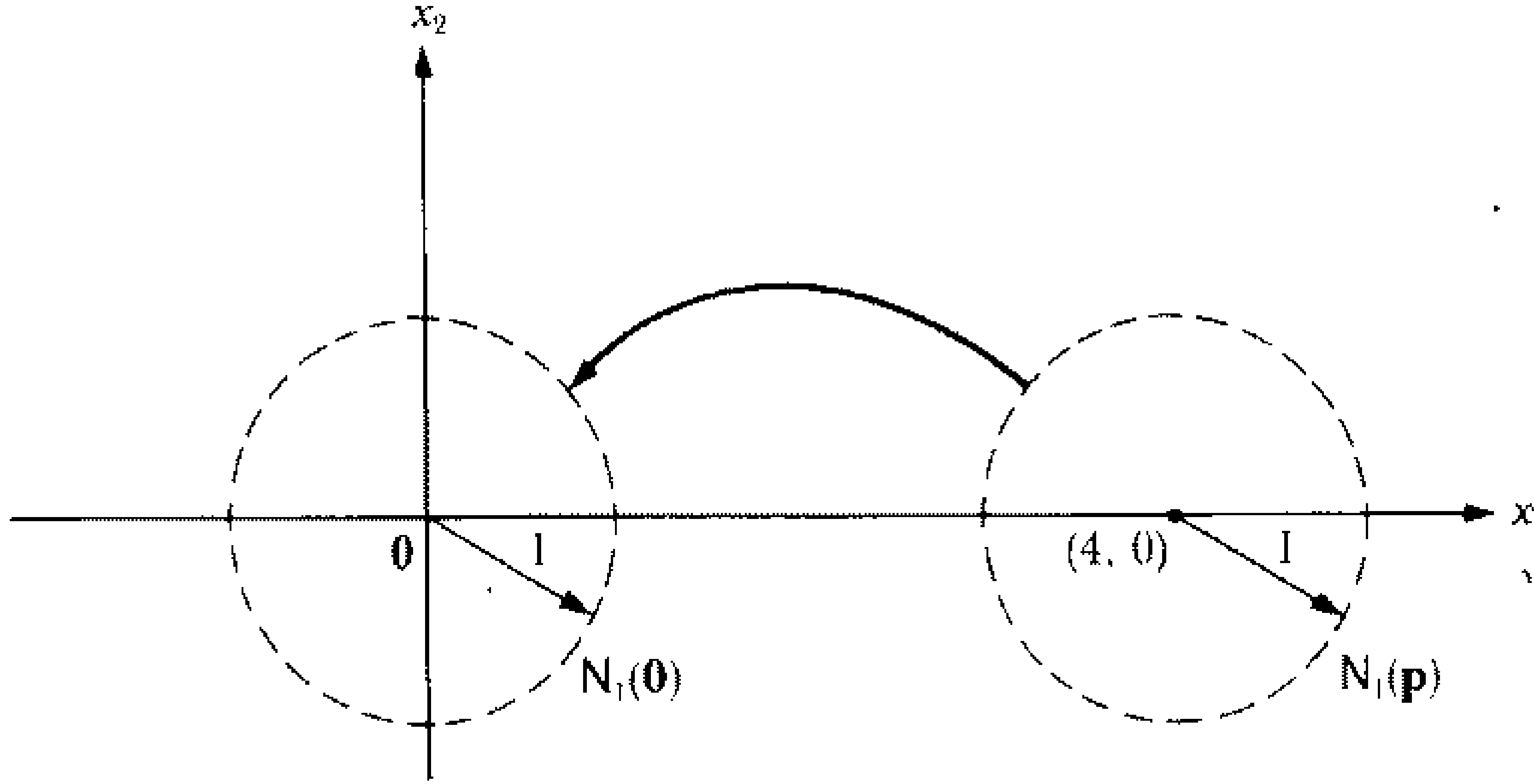
مثال 14.4:

إذا كان T تحويلاً من E^2 إلى E^2 مُعرّفاً بـ: $T(\mathbf{x}) = (x_1 - 4, x_2)$

والفئة A هي الفئة $\mathbf{N}_1(\mathbf{0})$ ، فإن:

$$T^{-1}\left[\mathbf{N}_1(\mathbf{0})\right] = \mathbf{N}_1(\mathbf{p})$$

حيث $\mathbf{p} = (4, 0)$ ؛ لأن وظيفة T هي بكل بساطة إزاحة كل نقطة أربع وحدات إلى اليسار (انظر الشكل 14.1).



شكل (14.1)

النظرية 14.1:

إذا كان T تحويلاً من الفضاء المتري X إلى الفضاء المتري Y، فإن T متصل على الفئة المفتوحة D في X إذا كان وفقط إذا كان لكل فئة مفتوحة A في Y تكون $T^{-1}[A]$ فئة مفتوحة في X.

البرهان:

أولاً نفرض أن T متصل على D ولنفرض أن A أي فئة مفتوحة في Y. إذا كان $T^{-1}[A] = \varnothing$ فإنها فئة مفتوحة. وإذا كان $T^{-1}[A] \neq \varnothing$ فإنه توجد على الأقل نقطة p في D بحيث تكون $T(p) \in A$. لا بد أن نبرهن على أن p نقطة داخلية للفئة $T^{-1}[A]$. بما أن A فئة مفتوحة فإنه توجد كرة $N_\delta(T(p))$ محتواة كلياً في A. واستناداً لخاصية الاتصال توجد كرة $N_{\delta(p)}$ بحيث إنه إذا كان $x \in N_\delta(p) \cap D$ ، فإن:

$T(x) \in N_\varepsilon(T(p)) \subseteq A$. إذن $N_\delta(p) \cap D \subseteq T^{-1}[A]$.

بما إن D فئة مفتوحة، نستطيع اختيار $\delta' \leqslant \delta$ بحيث إن:

$$\mathbf{N}_{\delta'}(p) \subseteq \mathbf{N}_{\delta}(p) \cap D \subseteq T^{-1}[A]$$

لهذا السبب فإن p نقطة داخلية للفئة $T^{-1}[A]$. إذن $T^{-1}[A]$ فئة مفتوحة. وبالعكس، لنفرض أن $T^{-1}[A]$ فئة مفتوحة كلما كانت A فئة مفتوحة، ولنفرض أن p نقطة في D و ε عدد موجب. بما أن $\mathbf{N}_\varepsilon(T(p))$ فئة مفتوحة في Y و $T^{-1}[\mathbf{N}_\varepsilon(T(p))]$ فئة مفتوحة في X، فإن p نقطة داخلية، لهذا السبب فإنه إذا كان δ عدداً موجباً فإن:

$$\mathbf{N}_{\delta}(p) \subseteq T^{-1}\left[\mathbf{N}_{\varepsilon}(T(p))\right].$$

هذا يعني أنه إذا كان $x \in \mathbf{N}_\delta(p)$ فإن $T(x) \in \mathbf{N}_\varepsilon(T(p))$ ، أي أن T متصل عند p.

النتيجة التالية هي بالضبط نظير النظرية 4.2 لدالة من ℝ إلى ℝ. على الرغم من أن البرهان كالبرهان السابق، فإننا نعيده هنا حتى تكون الرموز والمصطلحات للتحويلات مألوفة لدينا.

نظرية 14.2: (المعيار المتتالي للاتصال)

التحويل T متصل عند p إذا كان وفقط إذا كانت لكل متتالية $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ في D تتقارب إلى p، تكون المتتالية $\{T(x^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ تقاربية إلى T(p).

البرهان:

أولاً نفترض أن T متصل عند p ولنفرض أن $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية تقاربية إلى p. إذا كان $\varepsilon > 0$. فإنه يوجد عدد موجب δ حيث أن $x \in \mathbf{N}_\delta$ يؤدي إلى أن $T(x) \in \mathbf{N}_\varepsilon(T(p))$. بما أن $\lim_k x^{(k)} = p$ فإنه يوجد عدد N حيث يكون $k > N$ يؤدي إلى أن $x^{(k)} \in \mathbf{N}_\delta(p)$ والذي يؤدي بدوره إلى $T(x^{(k)}) \in \mathbf{N}_\varepsilon(T(p))$. لهذا السبب فإن $\lim_k T(x^{(k)}) = T(p)$.

الآن لنفترض أن T غير متصل عند p. فإنه يوجد عدد موجب ε^* بحيث أنه لكل عدد صحيح موجب k تكون $\mathbf{N}_{1/k}(p)$ محتوية على بعض x والتي تمتاز بالخاصية $T(x^{(k)}) \notin \mathbf{N}_{\varepsilon^*}(T(p))$. لكل k، نختار مثل هذه الـ x، لنقل $x^{(k)}$ والتي تحقق:

$x^{(k)} \in \mathbf{N}_{1/k}(p)$ و $T(x^{(k)}) \notin \mathbf{N}_{\varepsilon^*}(T(p))$.

بما أن $d_n\ (x^{(k)}, p) < \frac{1}{k}$ ، فيكون لدينا $\lim_k x^{(k)} = p$ ولكن $d_m(T(x^{(k)}) ، T(p)) \geqslant \varepsilon^*$ ولهذا فإن $\left\{T(x^{(k)})\right\}_{k=1}^{\infty}$ لا تتقارب إلى $T(p)$.

كما في الباب الرابع، فإن SCC نافعة في توضيح أن الدالة المعطاة غير متصلة عند النقطة المعطاة. والاحتفاظ بهذه المعلومة جيد في التمارين التالية.

تمارين 14.2

1 ـ لنفرض أن T تحويل من E^2 إلى E^2 معطى بـ: $T(\mathbf{x}) = (3x_1, 3x_2)$ ولنفرض أن $A = \mathbf{N}_6(\mathbf{0}) \subset E^2$. أوجد $T^{-1}[A]$.

2 ـ لنفرض أن T تحويل من E^2 إلى E^2 معطى بـ:

$$T(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} , \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right),$$

ولنفرض أن $A = \mathbf{N}_{1/4}(\mathbf{0}) \subset E^2$ ، أوجد $T^{-1}[A]$.

3 ـ لنفرض أن f دالة من E^n إلى E^1 والمعطاة $f(\mathbf{x}) = \left[x_1^2 + \ldots + x_n^2\right]^{1/2}$ ولنفرض A الفترة $(-3 ,2)$. أوجد $f^{-1}[A]$.

4 ـ لنفرض أن T تحويل من E^2 إلى E^2 ومُعطى على النحو التالي $T(\mathbf{x}) = (x_1 + 2, x_2 + 2)$. برهن على أن T متصل على E^2.

5 ـ مُعْطى f دالة على E^2 :

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2} , & \text{if} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0 , & \text{if} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

برهن أن f منفصلة عند 0.

6 ـ لنفرض أن f دالة على E^2 معطاة بـ:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{x_1x_2}{|x_1x_2|}, & \text{if} \quad x_1x_2 \neq 0, \\ 0, & \text{if} \quad x_1x_2 = 0. \end{cases}$$

برهن على أن f منفصلة عند 0

7 ـ برهن أن الدالة المعطاة في تمرين 6 منفصلة عند كل نقطة **p** التي ذات الشكل $(0 ، p_2)$ أو $(p_1 ، 0)$.

8 ـ لنفرض أن T تحويل من E^2 إلى E^2 ومُعطى بالصيغة:

$$T(\mathbf{X} = \left(\sin\left(\frac{1}{x_1}\right), x_2\right)$$

إذا كان $x_1 \neq 0$.

برهن أن T تحويل غير متصل عند كل نقطة على شكل $(0 ، p_2)$ بغض النظر عن تعريف $T(\mathbf{x})$ عندما $x_1 = 0$.

14.3 مدى التحويل المتصل

The Range of a Continuous Transformation

ندرس في هذا البند فئات جزئية من مدى تحويل متصل. إذا كانت S فئة جزئية من نطاق T فإننا نستخدم نفس رموز التعريف 14.2 ونفرض أن $T[S]$ يدل على صورة S تحت تأثير T:

$$T[S] = \{T(p) : p \in S\}.$$

إذا كان T تحويلاً متصلاً وكانت لـ S بعض الخواص المعينة كفئة جزئية من نطاق T، فنسأل ما إذا كانت الصورة $T[S]$ محتفظة بالخواص المعينة نفسها كفئة جزئية من مدى T. أول نظرية في هذا البند تؤكد أن خاصية الترابط connectedness يحافظ عليها تحت تأثير

الراسم المتصل. هذه الخاصية هي تعميم لنظرية القيمة الوسطى (نظرية 5.3) Intermediate value theorem في حالة الفضاء المتري.

نظرية 14.3:

إذا كان T تحويلاً متصلاً على الفئة المفتوحة D وكانت S فئة جزئية مترابطة من D، فإن T يحول S إلى فئة مترابطة $T[S]$.

البرهان:

لنفرض أن T تحويل متصل على الفئة المفتوحة D وإن $S \subseteq D$. نفترض علاوة على ذلك بأن $T[S]$ فئة غير مترابطة disconnected ونبيِّن بأن S لا بد أن تكون غير مترابطة. باستخدام النظرية 13.5، توجد فئتان A, B حيث إن $T[S] \subseteq A \cup B$ وتتقاطع الفئتان B، A مع S. باستخدام النظرية 14.1 و $T^{-1}[A]$ فإنّ $T^{-1}[B]$ فئتان مفتوحتان و $S \subseteq T^{-1}[A] \cup T^{-1}[B]$ أيضاً، لأن كل نقطة من S قد حُوِّلَت إلى A أو B. تالياً: $T^{-1}[A] \cap S \neq \emptyset$ ؛ لأن بعض نقط $T[S]$ تكون في A. وبالمثل فإن $T^{-1}[B] \cap S \neq \emptyset$. علاوة على ذلك، $T^{-1}[A]$ ، $T^{-1}[B]$ غير متقاطعتين؛ لأنه إذا كان النقطة x في كل منهما فإن $T(X)$ تكون في A، B كلتيهما. لهذا السبب وباستخدام النظرية 13.5 تكون S غير مترابطة.

النظرية التالية تكوّن تعميم النظريتين 5.1 و 5.2 في حالة الفضاء المتري. في هاتين النظريتين ندرس مدى دالة متصلة على فترة مغلقة. في حالة الفضاء المتري ندرس فئة مغلقة ومحدودة ونسأل ما إذا كانت صورتها تحت تأثير تحويل متصل فئة مغلقة ومحدودة أيضاً.

لكي نؤكد الإجابة لا بد أن نفترض أن الفضاء المتري له خاصية هاين - بوريل (نظرية (ب) 13.12). هذا يؤدي إلى خاصية المتتالية المحدودة (نظرية (د) 13.12) وتستخدم هاتان النظريتان في البرهان.

نظرية 14.14:

لنفرض أن X فضاء متري يتمتع بخاصية هاين - بوريل ولنفرض أن T تحويل متصل على $D \subseteq X$. إذا كانت D مغلقة ومحدودة فإن صورتها $T[D]$ تكون مغلقة ومحدودة أيضاً.

البرهان :

أولاً نوضح بأن $T[D]$ محدودة. لنفرض أن p نقطة في D حيث إن $T(p) \in T[D]$. للاختصار نكتب N_k للتعبير عن الكرة المفتوحة:

$$N_k(T(p)) \quad \text{و} \quad A_k = T^{-1}[N_k].$$

باستخدام النظرية 14.1 كل A_k مفتوحة في X وبما أن $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ يحتوي على مدى T كله فإننا نستنتج أن $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ غطاء مفتوح (open cover) للفئة D. الآن وباستخدام خاصية هاين - بوريل يوجد تجمع نهائي من A_k يغطي D. بما أن $A_k \subseteq A_{k+1}$ فهذا يعني بأنه توجد فئة واحدة ولنقل $A_{k'}$ تحتوي على D. إذن أصبح لدينا $D \subseteq A_{k^*}$ ، وهذا يؤدي إلى أن $T[D] \cup T[A_{k^*}] = N_{k^*}$ وبذلك تكون $T[D]$ محتواة في كرة، وهذا يعني أن $T[D]$ محدودة.

ولكي نُبيِّن أن $T[D]$ مغلقة، ندرس نقطة نهاية q للفئة $T[D]$.

إذن توجد متتالية $\left\{q^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ في $T[D]$ بحيث تكون $\lim_k q^{(k)} = q$. لكل $q^{(k)}$ في $T[D]$ نستطيع اختيار $x^{(k)}$ في D بحيث يكون $a^{(k)} = T(x^{(k)})$ بما أن D محدودة فإن $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية محدودة وباستخدام النظرية (د) 13.12 فإن لها متتالية جزئية تقاربية ونهايتها لا بد أن تكون p في D؛ لأن D مغلقة، لنقل إنّ $\lim_m x^{k_m} = p$.

باستخدام SCC (النظرية 14.2)، فإن $\lim_m T(x^{k_m}) = T(p)$ ؛ ولكن لا بد لِـ $\left\{T(x^{k_m})\right\}_{m=1}^{\infty}$ أن تكون لها نقطة النهاية نفسها كما لِـ: $\left\{q^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{T(^{(k)})\right\}_{k=1}^{\infty}$.

وهكذا $T(p) = q$ ، وq موجودة في $T[D]$ ومن ثم فهي $T[D]$ تحتوي على كل نقط نهايتها.

تمارين 14.3

1 ـ لنفرض أن T تحويل من E^2 إلى E^2 بحيث إن لكل **p** في E^2 يكون ترتيب الاحداثي الصادي لـ $T(\mathbf{p})$ غير صفري. إذا كان T يحول النقطة $(0, -1)$ والنقطة $(0, 1)$ كل إلى نفسها، بيِّن أن T تحويل متصل.

2 ـ إذا كان T تحويل متصل من E^2 حيث إن $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ و $T[E^2]$ غير محدودة. برهن أنه توجد نقطة **p** في E^2 حيث يكون $d(\mathbf{0}، T(\mathbf{p})) = 1$.

3 ـ أوجد دالة f متصلة على الفئة المحدودة D في E^2 بحيث تكون $T[D]$ فئة غير محدودة.

4 ـ أوجد دالة متصلة على E^1 تحوّل اتحاد الفترتين $[0, 1]$ ، $[2, 3]$ فوقياً (onto) إلى فئة النقطتين $\{1\} \cup \{0\}$.

5 ـ أوجد تحويلاً نطاقه الكرة $N_1(\mathbf{0})$ في E^2 بحيث يحوِّل $N_1(\mathbf{0})$ فوقياً وباتصال الى الخط $L = \{\mathbf{x} \in E^2 : x_2 = 0\}$.

6 ـ أوجد دالة متصلة f على E^2 بحيث تحوِّل الفئة المغلقة D فوقياً إلى فئة غير مغلقة $T[D]$.

7 ـ لنفرض أن D فئة مغلقة ومحدودة في E^2 ولنفرض أن **p** نقطة في $E^2 \sim D$. برهن أنه توجد نقطة **q** في D تكون الأقرب جداً من **p** ، أي أن لكل **x** في D يكون $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

14.4 الاتصال في E^n Continuity in E^n

قد يكون من الطبيعي لكي نتحقق من اتصال دالة من E^n إلى E^1 أن نعتبر تأثيرات نهايات المتتالية على كل إحداثي على حدة. فعلى سبيل المثال، إذا أعطيت f بالصيغة التالية:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2}, & \text{if} \quad x_2 \neq 0, \\ 0, & \text{if} \quad x_2 = 0, \end{cases}$$

نلاحظ لأي قيمة غير صفرية وثابتة لـ x_2. أن f دالة متصلة للمتغير x_1، ولكن لأي قيمة ثابتة لـ x_1 ما عدا الصفر فإن f تكون منفصلة عند $x_2 = 0$ (بالضبط f منفصلة عند $(x_1, 0)$ في E^2)، هذه الطريقة هي سهلة وبسيطة لإيجاد نقطة الانفصال، ولكن الأهم أن نذكر أن الاتصال عند احداثي لا يضمن لنا اتصال f في E^n . الاتصال عند النقطة **p** في E^n يتطلب أن تقترب $f(\mathbf{x})$ إلى $f(\mathbf{p})$ كلما اقتربت **x** من **p** عبر أي مسار متصل. والمثالان التاليان يوضحان هذه الحقيقة.

مثال **14.5** :

لنفرض أن f مُعرَّفة على E^2 بـ : $f(\mathbf{0}) = 0$ وإذا كان $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ فإن:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} .$$

فإن $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$ لأي x_1 أو x_2.

ولهذا فإن $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ تقترب إلى الصفر على المحورين، ونرى أن $\left\{f(\mathbf{x}^{(k)})\right\}_{k=1}^{\infty}$ تقترب إلى $f(\mathbf{0})$. ولكن إذا درسنا متتالية أخرى تقترب إلى **0** على طول خط آخر، ولنقل:

$\mathbf{x}^{(k)} = \left(\frac{1}{k} ، \frac{1}{k}\right)$ فإن:

$$f(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

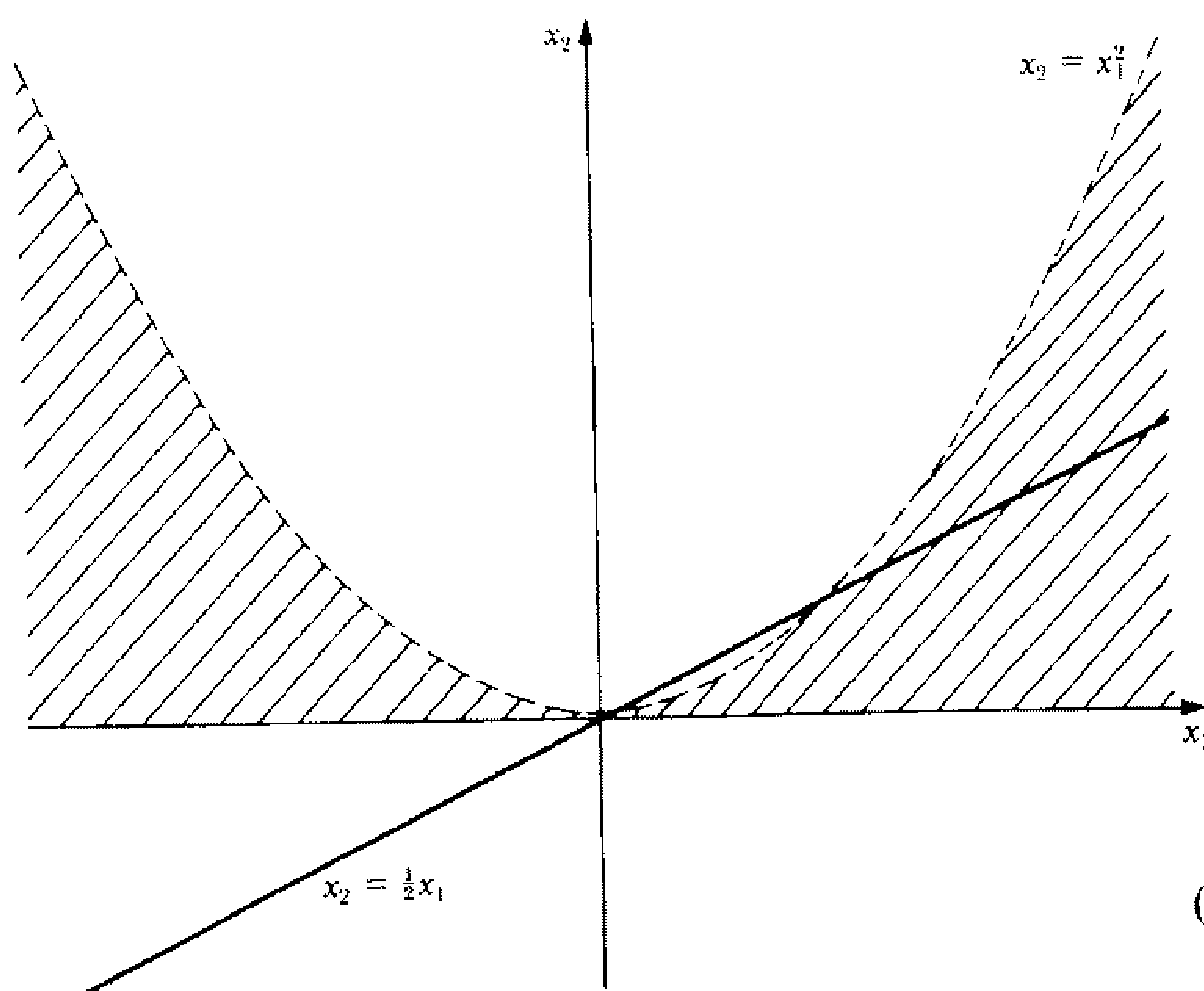
لكل k، وبهذا نجد أن $\left\{f(\mathbf{x}^{(k)})\right\}_{k=1}^{\infty}$ تتقارب إلى $\frac{1}{2}$.

لهذا السبب وباستخدام النظرية 14.2 نجد أن f غير متصلة عند **0**.

مثال **14.6** :

لنفرض أن F ترمز للفئة $\left\{\mathbf{x} \in E^2 : 0 < x_2 < x_1^2\right\}$ والتي تتكون من كل النقط

الواقعة بـين المحور السيني x_1 والقـطع المكافىء المعـطى بالمعـادلة $x_2 = x_1^2$ (انـظر الشكل 14.2).



شكل (14.2)

تُعرَّف الدالة f لتكون ما يسمى «بالدالة المميزة» للفئة F:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \mathbf{x} \in F, \\ 0, & \text{if} \quad \mathbf{x} \notin F, \end{cases}$$

من ثم $f(\mathbf{x})$ تقـترب من 0 ($(f(\mathbf{0}) =$) كلما اقترب **x** من **0** عـلى طول أي مسـار خطيّ، ولنقل: إن $\mathbf{x}^{(k)} = (t_k, mt_k)$ حيث $\lim_k t_k = 0$ ؛ لأنه عندما تكـون t_k صغيرة جـداً (بـين 0 و m) لا تكون $\mathbf{x}^{(k)}$ في F. ولكن بـالرغم من ذلـك، فـإن f غـير متصلة عنـد **0**؛ لأنـه إذا كانت $\mathbf{y}^{(k)} = \left(\frac{1}{k}, \frac{k^2}{2}\right)$ فـإن $\mathbf{y}^{(k)} \in F$ ، وبذلـك فإن $\left\{f(\mathbf{y}^{(k)})\right\}_{k=1}^{\infty}$ تتقارب إلى $1 \neq f(\mathbf{0})$ كلما كبر k بدون حدود.

المثالان السابقان يوضحان أن نهايات الإحداثيات غير كافية لاتصال الـدالة ذات النـطاق متعدد الأبعاد (multidimensional).

ولكن هناك شرط ضروري لاستنتاج الاتصال. في الأمثلة 14.5، 14.6 اعتمدنا على SCC لاستنتاج حكمنا على الانفصال، ولكن هذا الشرط الضروري يمكن أن يوضع بدون الـرجوع

إلى نهايـة المتتالية (Sequential limit). هذا يتم بحيلة مألوفة لدى طلبة التفاضل والتكـامل للمتغيرات المتعددة. لنفرض أن **x** تقترب من نقطة معطاة هي **p** على طول المسار والتي تكون عندها كل احداثيات **x** حرة ما عدا احداثي واحد له القيمة الثابتة المنـاظرة لإحـداثي النقطة **p**.

هذه النهايـة الواحـدة للاحـداثيات يمكن اختبـارها لكـل الاحداثيـات n في E^n، ولكي تكون الدالـة f متصلة عند **p** فـإن قيمة كـل نهاية من هـذه n من النهايـات لا بد أن تكـون $f(\mathbf{p})$.

وقد لُخِص هذا الاستنتاج في النظرية التالية:

نظرية 14.5:

إذا كانت f متصلة عند **p** في E^n فإن لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\lim_{x_i \to p_i} f(p_1, \ldots, x_i, \ldots, p_n)] = f(\mathbf{p}) \qquad (1)$$

عندما تدل $(p_1, \ldots, x_i, \ldots, p_n)$ على النقطة y المعطاة:

$y_i = x_i$ ، $y_j = p_j$ لكل $j \neq i$.

المفروض ملاحـظة أن النهاية في (1) هي نهاية لـدالة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ كـما درسناهـا في الفصل الرابع، وإذن لا تحتاج إلى تعريـف آخر. ولم نعطِ تعريفاً لنهاية الدالة على E^n عنـدما تكـون $n > 1$ ولكن عرّفنا فقط الاتصال لمثل هذه الدوال.

تمارين 14.4

وضـح في التـمارين من 1 الى 3، أن f منفصلـة عنـد **0** عـلى الـرغـم مـن أن $f(0, x_2) = 0 = f(x_1, 0)$ لكل من x_1، x_2.

1 ـ $f(\mathbf{0}) = 0$ وإذا كان $\mathbf{x} \neq 0$ ، فإن $f(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1x_2}{x_1^4 + x_2^4}$

2 ـ $f(\mathbf{x}) = 0$ إذا كان $x_1x_2 = 0$ ولغير ذلك $f(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1x_2}{|x_1x_2|}$

3 ـ $f(\mathbf{x}) = 0$ إذا كان $x_2 = 0$ ، ولغير ذلك $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\sin x_1}{x_2}$

4 - لنفرض أن f دالة من E^3 معرّفة كالآتي:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{x_1x_2\,x_3^2}{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4} , & \text{if} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0 \quad , & \text{if} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

بَيِّنْ أن f منفصلة عند **0** على الرغم من أن $f(\mathbf{x}^{(k)})$ تؤول إلى **0** كلما اقتربت $\mathbf{x}^{(k)}$ إلى **0** على طول أحد محاور الاحداثيات (قارن ذلك بمثال 14.5).

5 - عرف $F = \{\mathbf{x} \in E^3 : 0 < x_3 < x_1^2 + x_2^2\}$ وافرض أن f دالة من E^3 معطاة كالآتي:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \mathbf{x} \in F, \\ 0, & \text{if} \quad \mathbf{x} \notin F. \end{cases}$$

وضح أن $f(\mathbf{x}^{(k)})$ تؤول إلى $f(\mathbf{0})$ كلما اقتربت $x^{(k)}$ من **0** على طول أي مسار خطي ولكن f منفصلة عند **0**.

6 - يقال للتحويل T من E^n إلى E^m بأنه اختزال المسافة (reducing distance) إذا وجد عدد r بحيث يكون $0 < r < 1$ و

$$d_m(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leqslant r \cdot d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{لكل} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \text{في} \quad E^n$$

برهن أنه إذا كان T يختزل المسافة من E^n إلى E^m، فإن هناك نقطة واحدة ثابتة $\mathbf{p}^*$ بحيث إن $T(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$.

(ارشاد: لبعض **x** في E^n، عرّف

$$\mathbf{x}^{(1)} = T(\mathbf{x}), \mathbf{x}^{(2)} = T(T(\mathbf{x})), \ldots, \mathbf{x}^{(k)} = T((\mathbf{x}^{(k-1)})$$

بَيِّنْ $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي، وخذ $\lim_k \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{p}^*$).

يمكن للفضاء E^n أن يمنح تركيبات جبرية وذلك بتعريف حاصل جمع النقاط في E^n مستخدمين الجمع الاحداثي :

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)$$

$$= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n). \quad (1)$$

ويمكن تعريف عملية الضرب في كميات غير متجهة (Scalars) كالآتي : إذا كان **x** في E^n و a في $\mathbb{R}$ $(= E^1)$ ، فإن :

$$a\mathbf{x} = a(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n). \quad (2)$$

وتُقَدَّم أيضاً المتجهات الأساسية (basis vectors) كالآتي :

$$\mathbf{e}^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0),$$

$$\mathbf{e}^{(2)} = (0, 1, 0, \ldots, 0),$$

$$\mathbf{e}^{(3)} = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0), \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}^{(n)} = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1).$$

باستخدام (1) و (2) نرى أن أي نقطة **x** أنه يمكن التعبير عن أي كتركيبة خطية linear combination لمثل n من هذه النقاط :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= x_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 0, 1)$$

$$= x_1\mathbf{e}^{(1)} + x_2\mathbf{e}^{(2)} + \ldots + x_n\mathbf{e}^{n}. \quad (4)$$

أخيراً نعرف معيار (مقياس) (norm) نقطة **x** كما يلي :

$$||\mathbf{x}|| = \left[x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right]^{1/2}. \quad (5)$$

نـلاحظ أن $\|\mathbf{x}\| = d_n(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ وهي البعــد الاقليــدي بـين $\mathbf{x}$ و $\mathbf{0}$ ، ومن ذلـك نجـد أن $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

بنتيجة التعريفات السابقة فإنّ الفضاء المتجه n- نوني الأبعاد، مألوف لـدينا بتفـاصيله من دراسة الجبر الخطي . وليس في نطاق دراستنـا هذه دراسـة وتقديم نـظرية الفضـاء المتجه ذي الأبعاد المنتهية، ولكن من المناسب اختيار بعض التحويلات الخطية باختصار لأهميتها، ولأنها أمثلة بسيطة عن التحويلات المتصلة من E^n إلى E^m.

تعريف 14.3:

يقال: بأن التحويل T من E^n إلى E^m تحويل خطي (linear) بشرط أنه لكل $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ في E^n و a, b في E^1

$$T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y}).$$

النتيجـة الرئيسيـة في هذا البنـد تكمن في امكانيـة التعبير عن أي تحـويـل خـطي بضرب المصفوفات (matrix product)، أي أنه توجد مصفوفة $[a_{i,j}]$ ذات الأبعاد $m \times n$ بحيث إنه إذا كان $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ فإن:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \cdots a_{2,n} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{m,1} & a_{m,2} \cdots a_{m,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

وهذا هو معنى النظرية التالية.

نظرية 14.6:

إذا كان T تحويلاً من E^n إلى E^m ، فإن T تعطى بالآتي:

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m),$$

عندما يكون:

$$y_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n$$
$$y_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n$$
$$\vdots \qquad (6)$$
$$y_n = a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,2}x_n,$$

،كل معامل $a_{i,j}$ يكون عدداً حقيقياً.

البرهان:

أولاً ندرس الحالة التي يكون عندها $m = 1$ ، وبذلك تكون T دالة من E^n إلى E^1.
ركز انتباهنا على النقاط المهمة لـ n والمتجهات الأساسية $\{e0^{(i)}\}$. إنّ صُوَر (images) هذه النقاط n تشكّل أعداداً، ولنقل إن:

$$T(e^{(1)}) = A_1, T(e^{(2)}) = A_2, \dots, T(e^{(n)}) = A_n.$$

استخدام (4) وخطية T يكون لدينا:

$$T(x) = T(x_1 0^{(1)} + x_2 e^{(2)} + \dots + x_n e^{(n)})$$
$$= x_1 T(e^{(1)}) + x_2 T(e^{(2)}) + \dots + x_n T(e^{(n)})$$
$$= A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n.$$

،لهذا السبب فإن T قد مثلت بالمصفوفة الخطية

$$[A_1 \, A_2 \dots A_n].$$

الآن لنفترض أن $m > 1$. إذن لدينا

$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ عندما يكون كل احداثي من y_i دالة في x، لنقل إن:

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n).$$

بما أن T خطيٌّ فهذا يؤدي إلى أن T يكون خطيًّا عند كل احداثي، أي أن، كل f_i دالة خطية من E^n إلى E^1.

إذن كما في الحالة الأولى، كل f_i تعطى على شكل مصفوفة خطية:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n.$$

هذه الفئة من m من الدوال الخطية $f_1, \ldots, f_m$ تحدد m من صفوف (rows) المصفوفة $[a_{ij}]$ التي تمثل T كما في (6).

يمكن استخدام الفكرة وراء برهان النظرية 14.6 في ايجاد التمثيل بالمصفوفات لتحويل خطيّ إذا كان صور النقط n معروفة.

مثـال 14.7:

لنفرض أن T تحويل خطي من E^3 إلى E^3 بحيث يكون:

$$T(1, 0, 0) = (1, 2, -1),$$

و

$$T(0, 1, 0) = (4, 0, 3),$$

و

$$T(0, 0, 1) = (-3, 1, 1).$$

عندئذٍ تُمثَّل T بالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث تكون أعمدتها صور لكل من $T(0, 0, 0)$، $T(0, 1, 0)$، $T(1, 0, 0)$ على التوالي.

مثـال 14.8:

لنفرض أن T تحويل خطي من E^2 إلى E^2 بحيث إن:

$$T(2, -1) = (1, -1), \quad T(1, 1) = (1, 2).$$

لنفرض أن المصفوفة التالية من 2×2 تمثل التحويل T $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

لنحصل على $T(1, 1)$ نضرب المصفوفة في «النقطة» $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ونساوي النتيجة بـ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

ومن ذلك:

(7) $a_{11} + a_{12} = 1$ و $a_{21} + a_{22} = 2$

وبالمثل لنحصل على $T(2, -1)$ نضرب المصفوفة بـ: $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

ونساوي النتيجة بـ: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(8) $2a_{11} - a_{12} = 1$ و $2a_{21} - a_{22} = 1$

وبحل مجموعة المعادلتين الناتجتين من (7)و (8)، نحصل على $a_{11} = 0$ و $a_{21} = 1$ وكذلك $a_{21} = 1$ و $a_{22} = 2$. لهذا السبب فإن T تعطى بالمصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تعين النتيجة الأخيرة في هذا البند خاصية الاتصال للتحويلات الخطية. وفي برهنة هذه الحقيقة تستخدم النتائج التالية العامة للتحويلات الخطية بين الفضاءات الاقليدية.

نظرية مساعدة 14.1:

إذا كان T تحويلاً خطياً من E^m إلى E^n ، فإنه يوجد عدد M_T بحيث يكون لكل **x** في E^m

(9) $$\|T(\mathbf{x})\| \leqslant M_T \|\mathbf{x}\|.$$

البرهان:

لنفرض أن المصفوفة $[a_{ij}]$ ذات أبعاد $n - m$ تمثّل التحويل T ولنعرّف:

$$M_T = \{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

عندما يؤخذ الجمع الثنائي على كل المداخل mn للمصفوفة. فإن:

$$\|T(\mathbf{x})\| = \{(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j)^2 + \dots + (\sum_{j=1}^{n} a_{m,j}x_j)^2\}^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

يمكن التعامل مع كل خط في المصفوفة $[a_{ij}]$ على أساس أنه نقطة في E^n. إذن كل مجموع في الجانب الأيمن من (11) يمكن حسابه باستخدام متباينة كوشي Cauchy - بونياكوفسكي Bunyakovsky - شوارتز Schwartz (نظرية 13.1):

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j)^2 \leqslant (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2)(\sum_{j=1}^{n} x_j^2)$$

وبذلك تقودنا (11) إلى:

$$\|T(\mathbf{x})\| \leqslant \{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 + \dots + \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}^2\}^{\frac{1}{2}} \{\sum_{j=1}^{n} x_j^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{x}\| = M_T \|\mathbf{x}\|.$$

نظرية 14.7:

إذا كان T تحويلاً خطياً من E^n إلى E^m، فإن T متصل على E^n.

البرهان:

لنفرض أن **p** نقطة كيفية في E^n وأن M_T هو العدد الوارد في النظرية المساعدة 14.1. لكل **x** في E^n، لدينا:

$$d_m(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{p})) = \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{p})\|$$

$$= \|T(\mathbf{x} - \mathbf{p})\| \leqslant M_T \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| = M_T\, d_n(\mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

إذا أعطى $\varepsilon > 0$ ، نستطيع تعريف $\delta = \varepsilon/M_T$ ، وهذا يؤدي إلى $d_m(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{p})) < \varepsilon$ كلما كان $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < \delta$.

نلاحظ أن اختبار δ في البرهان السابق مستقل عن النقطة **p** التي برهنا على اتصال التحويل عندها. من ذلك نستنتج أن التحويلات الخطية منتظمة الاتصال uniformly continuous على نطاقها شبيهة بالدوال الخطية على $\mathbb{R}$.

تمارين 14.5

1 ـ لنفرض أن T تحويل خطي من E^4 إلى E^3 معطى بالمصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد صورة النقطتين $(1, 2, -1, 3)$ و $(-2, 1, 3, 2)$.

2 ـ لنفرض أن T تحويل خطي من E^4 إلى E^4 بحيث إن:

$T(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 2, 3)$

$T(1, 0, 0, 0,) = (2, 0, -1, 4)$

$T(0, 0, 0, 1) = (-6, 2, 4, 1)$

$T(0, 0, 1, 0) = (3, 2, -3, 1)$

أوجد المصفوفة التي تمثل T.

3 ـ لنفرض أن T تحويل خطي من E^2 إلى E^2 بحيث يكون $T(1, 1,) = (3, -1)$ و $T(1, -1) = (1, 7)$.

أوجد المصفوفة التي تمثل T.

4 - لنفرض أن T تحويل خطي من E^2 إلى E^2 بحيث يكون:

$T(2, 1) = (4, -5)$ ، $T(1, -3) = (-5, 1)$.

أوجد المصفوفة التي تمثل T.

5 - بَيِّن أن العدد M_T الذي اخترناه في (10) ليس بالضرورة أن يكون أصغر عدد يحقق (9).

(ارشاد: ادرس التحويل المحايد $T(x) = x$).

الفصل الخامس عشر

15

حساب التفاضل في الفضاءات الاقليدية

Differential Calculus in Euclidean Spaces

15.1 المشتقات الجزئية والمشتقات الاتجاهية

Partial Derivatives and Directional Derivatives

في هذا البند سنفرض أن f هي دالة من النطاق D في E^n الى ـ في E^1 وأن x نقطة في D ـ داخل D. نعتبر «خارج قسمة الفرق»:

$$\frac{\left[f(x_1, \ldots, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)\right]}{t}$$

وبالاستعانة بمتجهات الأساس، نكتب خارج قسمة الفرق كما يلي:

$$\frac{\left[f(x + te^{(i)}) - f(x)\right]}{t}$$

وتصف هذه النتيجة لنقطة معطاة x في D°، دالة (في t) من فئة ما $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ إلى ـ في E^1. ويضمن لنا المطلب الذي تكون فيه x نقطة داخلية في D أن خارج قسمة الفرق هذا معرّف مهما كان t قريباً قرباً كافياً من الصفر. وحيث إن الصفر يكون بذلك نقطة داخلية لنطاق النسبة، فإنه يمكننا أن نأخذ في الاعتبار احتمال أن يؤول خارج قسمة الفرق إلى نهاية عندما تؤول t إلى الصفر.

تعريف 15.1:

إذا وجدت النهاية التالية، نكتب:

$$f_i(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + te^{(i)}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

فتكون هذه النهاية هي المشتقة الجزئية للدالة f عند x بالاحداثي الـ i. وإذا وجدت هذه النهاية لكل x في فئة جزئية D^* من D فإنها دالة f_i على D^*.

مثـال 15.1:

إذا كانت

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2 + x_2^3 \sin(x_3^2),$$

فإن

$$f_1(\mathbf{x}) = 2x_1x_2,$$

$$f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 \sin(x_3^2),$$

$$f_3(\mathbf{x}) = 2x_2^3 x_3 \cos(x_3^2).$$

لاحظ أن كلاً من f_1, f_2, f_3 دالة في E^3، وبالتالي يمكننا «تفاضلها»، أي أننا نطبق التمرين 15.1 لنحصل على المشتقات من الرتبة الثانية:

$$f_{11}(\mathbf{x}) = 2x_2,$$

$$f_{22}(\mathbf{x}) = 6x_2 \sin(x_3^2),$$

$$f_{33}(\mathbf{x}) = 2x_2^3 \cos(x_3^2) - 4x_2^3x_3^2 \sin(x_3^2).$$

وأيضاً:

$$f_{12}(\mathbf{x}) = \left[f_1(x_1, x_2, x_3)\right]_2 = 2x_1,$$

$$f_{13}(\mathbf{x}) = \left[f_1(x_1, x_2, x_3\right]_3 = 0,$$

$$f_{21}(\mathbf{x}) = 2x_1,$$

$$f_{23}(\mathbf{x}) = 6x_2^2x_3 \cos(x_3^2),$$

$$f_{31}(\mathbf{x}) = 0,$$

$$f_{32}(\mathbf{x}) = 6x_2^2x_3 \cos(x_3^2).$$

لاحظ أنه في المثال السابق كانت $f_{13} = f_{31}$ ، $f_{12} = f_{21}$ و $f_{23} = f_{32}$. وهـذا يفترض بـأن هذه المشتقـات الجزئيـة المختلطة تعطى النتيجـة نفسها بغض النـظر عن تـرتيب عملية التفـاضل . وسنـرى فيما بعـد أنه عنـدما تكـون كل المشتقـات متصلة تتحقق بـالفعـل هـذه الخاصية .

نفرض أننا نريد أخـذ النهايـة لخارج قسمـة الفرق بـالاقتراب من $\mathbf{x}$ عـلى امتداد اتجـاه ما يختلف عن $\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \ldots, \mathbf{e}^{(n)}$. ويمكننـا أن نقترب من $\mathbf{x}$ عـلى امتـداد أي مسـار «خـط مستقيم» بالطريقة التالية . نفرض أن $\mathbf{u}$ نقطة في E^n بحيث إن $\|\mathbf{u}\| = 1$ ، عندئـذ يحدد $\mathbf{u}$ «اتجـاهاً بمعنى أنـه إذا كان t أي عـدد فإن $\mathbf{x} + t\mathbf{u}$ هي نقـطة تقع عـلى «الخط» المـار بـ $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x} + t\mathbf{u}$ بـحيـث يكـون $d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + t\mathbf{u}) = t$. (ونـعني بـالخط المـار بـ $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ الـفئـة $\{a\mathbf{x} + b\mathbf{y} : a \in R ، b \in R\}$ المُكوَّنة من كل التركيبات الخطية لـ $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$) .

تعريف 15.2 :

إذا وجدت النهاية التالية، نكتب :

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

التي تسمى بالمشتقة الاتجاهية للدالة f عند $\mathbf{x}$.

لاحظ أن f_i هي ببساطة $D_{\mathbf{u}}f$ في الحالة الخاصة عندما $\mathbf{u} = \mathbf{e}^{(i)}$.

مثـال 15.2 :

نفرض أن f هي دالة في E^2 معطاة بالصيغة : $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2^2,$

ونفرض أن $\mathbf{x} = (0, 1)$ و $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ عندئذ فإن :

$$\frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} = \frac{1}{t}\left[\frac{t}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{3t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2}.$$

وبجعل $t \to 0$ نحصل على: $D_u f(0, 1) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

وهناك نتيجة معروفة (نظرية 6.1) في نظرية الدوال من $\mathbb{R}$ إلى ـ في (into) $\mathbb{R}$ وهي أن القابلية للتفاضل تتضمن (تؤدي إلى) الاتصال. ومن المهم أن ندرك أن هذا التضمين ليس صالحاً في حالة المشتقات الجزئية للدوال في E^n، عندما يكون $n > 1$. وفي مثالي 14.5، 14.6 تتحقق لكل من الدالتين المتساوية $f_1(\mathbf{0}) = f_2(\mathbf{0}) = 0$، ولكن f منفصلة عند **0**. بالفعل، ففي الثاني من هذين المثالين لدينا $D_u f(\mathbf{0}) = 0$ لكل مشتقة اتجاهية، ومع ذلك فإن f ليست متصلة عند **0**.

تمارين 15.1

1 ـ معطى أن $f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \log(x_1^2 + x_2^2)$، عيّن كل المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى ومن الرتبة الثانية.

في التمارين 2-5 عيِّن $D_u f(\mathbf{x})$.

2 ـ $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2;\ \mathbf{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \mathbf{x} = (1, 2).$

3 ـ $f(\mathbf{x}) = x_1 x_2;\ \mathbf{u} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right);\ \mathbf{x} = (1, 1).$

4 ـ $f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_2 x_3\ \mathbf{u} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right);\ \mathbf{x} = (1, 1, 1).$

5 ـ $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2 x_3;\ \mathbf{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right);\ \mathbf{x} = (1, 2, 1).$

15.2 التفاضلات وخاصية التقريب

Differentials and the Approximation Property

نخطو خطوة أخرى بمحاولة تطوير المشتقة الاتجاهية. ومرة أخرى فإن **x** هي نقطة داخلية في النطاق D للدالة f. نفرض **x** نقطة قريبة بشكل كافي من **0** بحيث إن $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ تكون في D، وبعد ذلك ندرس الفرق $f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$.

مثـال 15.3 :

نفرض أن f هي الدالة في E^3 المعطاة بالصيغة :

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_3^2.$$

عندئذ فإن :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= (x_1 + \Delta x_1)(x_2 + \Delta x_2) - (x_3 + \Delta x_3)^2 \\ &= (x_1x_2 - x_3^2) + \{f_1(x)\Delta x_1 + f_2(x)\Delta x_2 + f_3(x)\Delta x_3\} + \{\Delta x_1\Delta x_2 - (\Delta x_3)^2\} \\ &= f(\mathbf{x}) + \{f_1(x)\Delta x_1 + f_2(x)\Delta x_2 + f_3(x)\Delta x_3\} + \{\Delta x_1\Delta x_2 - (\Delta x_3)^2\} \end{aligned}$$

ويمكن تفسير الحد الأوسط بوصفه صورة النقطة $\Delta\mathbf{x}$ تحت تـأثير الـدالة الخـطية L الممثلة بـالمصفوفـة الصف $[f_1(x)\ f_2(x)\ f_3(x)]$. وعندمـا $\|\Delta\mathbf{x}\|$ يكون صغيـراً (على سبيـل المثال $\|\Delta\mathbf{x}\| < 1$) يكون الحد الثالث أصغر، وبالتالي نحصل على التقريب :

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + L(\Delta\mathbf{x}). \qquad (1)$$

تعريف 15.3 :

إذا وجدت المشتقات الجزئية الـ n للدالة f عند النقطة $\mathbf{x}$، فإن تفاضل f عند $\mathbf{x}$ هو الـدالة الخطية $df_{\mathbf{x}}$ الممثلة بالمصفوفة الصف $df_{\mathbf{x}} = [f_1(x)\ f_2(x)\ \ldots\ f_n(x)]$.

والنتيجة الهامة التالية هي خاصية التقريب التي لاحـظناهـا في مثال 15.3 . ولإثبـات هذه النظرية نحتاج إلى النتيجة التمهيدية التالية :

نظرية مساعدة 15.1 :

إذا كانت f دالة بحيث إن مشتقاتها الجزئية الـ n تكـون موجـودة في داخل الكـرة $N_r(\mathbf{x})$ و $\Delta\mathbf{x}$ هي نقطة في $N_r(\mathbf{0})$ ، عندئذ توجد النقطة $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n)}$ في $N_r(\mathbf{x})$ بحيث إن :

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{p}^{(1)})\,\Delta x_1 + f_2(\mathbf{p}^{(2)})\,\Delta x_2 + \ldots + f_n(\mathbf{p}^{(n)})\,\Delta x_n). \qquad (2)$$

مخطط للبرهان :

النقط $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n)}$ هي نتيجـة تطبيق قـانون القيمـة الوسـطى لكل من الاحـداثيات

الـ n. على سبيل المثال، فإنه على جزء المستقيم

$$\left\{(1-t)\,\mathbf{x}+t(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{(1)}\Delta x_1): 0\leqslant t\leqslant 1\right\}$$

يمكننا اعتبار f دالة عددية (في t) قابلة للتفاضل على [0, 1] . ووفقاً لقانون القيمة الوسطى يوجد عدد t_1 بين 0 و 1 بحيث يكون:

$$f_1((1-t_1)\,x+t_1(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{(1)}\,\Delta \mathbf{x}_1)) = f_1(\mathbf{p}^{(1)}) = \frac{\left[f(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{(1)}\,\Delta \mathbf{x}_1)-f(\mathbf{x})\right]}{\Delta \mathbf{x}_1}$$

وبعد ذلك نطبق قانون القيمة الوسطى على الجزء المستقيم بين النقطتين

$(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{(1)}\,\Delta x_1)$ و $\mathbf{x}+\mathbf{e}^{(1)}\,\Delta x_1+\mathbf{e}^{(2)}\,\Delta x_2$ لنحصل على $\mathbf{p}^{(2)}$ ، نقطة على ذلك الجزء المستقيم بحيث يكون:

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{p}^{(2)}) = \frac{\left[f(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{(1)}\ \Delta x_1+\mathbf{e}^{(2)}\,\Delta x_1)-f(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{(1)}\Delta x_1)\right]}{\Delta x_2}$$

ويمكننا أن ننظر إلى هذه العملية كحركة من $\mathbf{x}$ إلى $\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}$ على امتداد مسار مضلع من $\mathbf{n}$ من الأجزاء المستقيمة بحيث يتغير على كل جزء مستقيم منها احداثي واحد فقط. وبذلك يمكن كتابة $f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})-f(\mathbf{x})$ يمكن كتابته «كمجموع مختصر»:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})-f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\mathbf{x}+\sum_{j=1}^{i}\mathbf{e}^{(j)}\Delta x_j\right)-f\left(\mathbf{x}+\sum_{j=1}^{i-1}\ \mathbf{e}^{(j)}\,\Delta x_j\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i\,(\mathbf{p}^{(i)})\,\Delta x_i.$$

وبذلك تتحقق (2). (في الحد الأول من هذا المجموع كتبنا: $\sum_{j=1}^{0}\mathbf{e}^{(j)}\Delta x_j$ بدلاً من **0**).

نظرية 15.1: **خاصية التقريب**.

إذا كانت f دالة على E^n حيث مشتقاتها الجزئية الـ n متصلة على الفئة المفتوحة D، فإنه لكل **x** في D يكون:

$$f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})+df(\Delta\mathbf{x})+R(\mathbf{x},\Delta\mathbf{x}),$$

حيث R دالة بحيث يكون:

$$\lim_{||\Delta x|| \to 0} \left[\frac{R(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x})}{||\Delta\mathbf{x}||} \right] = 0.$$

البرهان:

في البداية نختار النقط $\mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(n)}$ كما في النظرية المساعدة 15.1، وبذلك فإن:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{p}^{(1)})\,\Delta x_1 + \dots + f_n(\mathbf{p}^{(n)})\,\Delta x_n \\ &= f(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x})\Delta x_1 + \dots + f_n(\mathbf{x})\,\Delta x_n + \left[f_1(\mathbf{p}^{(1)}) - f_1(\mathbf{x})\right]\Delta x_1 + \dots + \\ &\qquad + \left[f_n(\mathbf{p}^{(n)}) - f_n(\mathbf{x})\right]\Delta x_n \\ &= f(\mathbf{x}) + df_{\mathbf{x}}(\Delta\mathbf{x}) + R(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x}). \end{aligned}$$

ولكل i

$$|\Delta x_i| \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = ||\Delta\mathbf{x}||,$$

ومن ثم ينتج أن:

$$\frac{|R(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x})|}{||\Delta\mathbf{x}||} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|f_i(\mathbf{p}^{(i)}) - f_i(\mathbf{x})\right| \frac{|\Delta x_i|}{||\Delta\mathbf{x}||} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|f_i(\mathbf{p}^{(i)}) - f(\mathbf{x})\right|.$$

وحيث إن كـلاً من f_i متصلة عند **x** فـإن الطرف الأيمن يؤول إلى الصفـر عنـدمـا $||\Delta\mathbf{x}||$ يؤول إلى الصفر، وهذا يُتمّ البرهان.

نظرية 15.2:

إذا كانت f دالة مشتقاتها الجزئية متصلة على D، فإن كـل المشتقات الاتجـاهية $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ موجودة في كل نقطة **x** في D. وعلاوة على ذلك يكون:

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = df_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}). \qquad (3)$$

البرهان:

وفقاً للنظرية 15.1 يمكننا كتابة: $f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) = df_{\mathbf{x}}(t\mathbf{u}) + R(\mathbf{x}, t\mathbf{u}),$

حيث

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{R(\mathbf{x}, t\mathbf{u})}{\|\Delta \mathbf{x}\|} = 0.$$

لاحظ أن $\|t\mathbf{u}\| = d_n(\mathbf{0}, t\mathbf{u}) = t$. باستخدام خطية $df_{\mathbf{x}}$ ، نرى أن:

$$\frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} = \frac{df_{\mathbf{x}}(t\mathbf{u}) + R(\mathbf{x}, t\mathbf{u})}{t}$$

$$= \frac{t df_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) + R(\mathbf{x}, t\mathbf{u})}{t}$$

$$= df_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) + \frac{R(\mathbf{x}, t\mathbf{u})}{\|t\mathbf{u}\|}$$

وعندما يؤول t إلى الصفر يؤول الطرف الأيسر إلى $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ ، وكذلك يؤول الطرف الأيمن إلى $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$.

وتُعبِّر المعادلة (3) للنظرية 15.2 عن طريقة حاصل الضرب القياسي لحساب المشتقة الاتجاهية وهي طريقة شائعة في حساب التفاضل الابتدائي ؛ لأنه بكتابة $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ في صورة مفكوكة نرى أن (3) تصبح :

$$d_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})u_1 + f_2(\mathbf{x})u_2 + \ldots + f_n(\mathbf{x})u_n. \quad (4)$$

ونوضح ذلك بحساب $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ مرة أخرى للمثال 15.2 .

مثـــال 15.4:

نفرض أن f دالة على E^2 معطاة بالصيغة:

$$f(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2^2,$$

ونفرض أن $\mathbf{x} = (0, 1)$ ، $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

عندئذٍ فإن:

$$f_1(\mathbf{x}) = x_2 = 1,\ f_2(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 = 2,$$

ولذا فمن (4) نحصل على:

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

ومن الواضح أن المشتقات الجزئية للدالة الثابتة تساوي صفراً بالتطابق. وعكس هذه الملاحظة ليس غير بسيط وحسب بل وعميقاً ويعد نتيجة مفيدة. ففي الحالة أحادية البعد استخدم قانون القيمة الوسطى لإثبات أنه إذا كانت f' تساوي صفراً بالتطابق، فإن f دالة ثابتة. وفي الصياغة الحالية للفضاء E^n يمكن مرة أخرى الاعتماد على قانون القيمة الوسطى لإثبات النظير نوني الأبعاد للنتيجة السابقة. وهذا الاستخدام لقانون القيمة الوسطى ظهر بالفعل في برهان النظرية المساعدة 15.1، والآن نستخدم هذه النظرية المساعدة مرة أخرى لبرهان المماثل نوني الأبعاد لقانون القيمة الوسطى.

نظرية 15.3:

إذا كانت f دالة على E^n حيث مشتقاتها الجزئية مساوية للصفر بالتطابق في الفئة المترابطة المفتوحة فإن f تكون ثابتة على D.

البرهان:

نفرض أن $\mathbf{x}$ نقطة اختيارية في D، وأن $f(\mathbf{x}) = c$. نعرّف الفئتين B و A كما يلي:

$$A = \{\mathbf{p} \in D : f(\mathbf{p}) = c\},\ B = \{\mathbf{p} \in D : f(\mathbf{p}) \neq c\}.$$

نثبت أن $B = \varnothing$. في البداية نلاحظ أن النظرية المساعدة 15.1 تضمن اتصال f على D. ومن اتصال f يمكننا أن نستنتج أن B مفتوحة؛ لأن B هي معكوس الصورة للفئة المفتوحة $(-\infty, c) \cup (c, \infty)$. وأيضاً تكون A مفتوحة؛ لأنه إذا كانت $\mathbf{p}$ في A و $N_r(\mathbf{p}) \subset D$، عندئذٍ وفقاً للنظرية المساعدة 15.1 تكون $f(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}) = 0$ لكل $\mathbf{p}$ في $(N_r(\mathbf{0}))$. ومن ثم فإن $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$ في A ولذا فإن $\mathbf{p}$ نقطة داخلية للفئة A. والآن فمن الواضح أن $D = A \cup B$ حيث B و A فئتان مفتوحتان غير متصلتين. وإذا كان كل من A و B فية غير خالية لكانت D غير مترابطة، ولذا فإن احدى هاتين الفئتين يجب أن تكون خالية. وحيث إن A تحتوي على النقطة $\mathbf{x}$ فإننا نستنتج أن B خالية، ومن ثم فلكل $\mathbf{p}$ في D تكون $f(\mathbf{p}) = c$.

تمارين 15.2

1 ـ عيِّن df_x للدالة والنقطة المعطاتين:

(أ) $f(\mathbf{x}) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ ، $\mathbf{x} = (-2, 3)$.

(ب) $f(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3^2$ ، $\mathbf{x} = (1, -3, 2)$.

(ج) $f(\mathbf{x}) = x_1x_2x_3^2 \sin\left(\frac{\pi x_4}{2}\right)$ ، $\mathbf{x} = (3, -1, 2, 1)$.

2 ـ استعن بالمعادلة (4) في تعيين $D_u f(\mathbf{x})$ للدوال الواردة في تمارين 15.1.2-15.1.5

3 ـ استعن بالمعادلة (4) في تعيين $D_u f(\mathbf{x})$

(أ) $f(\mathbf{x}) = x_1x_2^3 + \cos\left(\frac{\pi x_1}{2}\right)$ ، $\mathbf{x} = (1, 2)$ ، $\mathbf{u} = (-2, 4)$.

(ب) $f(\mathbf{x}) = x_1x_2^2x_3$ ، $\mathbf{x} = (3, -1, 2)$ ، $\mathbf{u} = (2, -2, 1)$.

(ج) $f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2x_3 + x_1x_4$ ، $\mathbf{x} = (1, 0, -1, 2)$.

$\mathbf{u} = (1, 2, -1, -2)$.

4 ـ استعن بالمعادلة (4) والنظرية 13.1 لاثبات أنه إذا كانت f دالة على E^n ذات مشتقات جزئية متصلة في $D°$، فإنه لأي $\mathbf{u}$ وأي $\mathbf{x}$ في $D°$ يكون:

$$|df_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})| \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

5 ـ بين أنه في تمرين (4) توجد نقطة $\mathbf{u}$ بـ $\|\mathbf{u}\| = 1$ بحيث تصح المتساوية في العلاقة (5) وبذلك تصل $|df_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})|$ إلى قيمتها القصوى.

6 ـ أثبت أنه إذا أخذت الدالة f قيمة قصوى (extreme) نسبية عند النقطة $\mathbf{x}$ في $D° \subseteq E^n$ ، وكان كل من مشتقاتها الجزئية موجودة في $D°$، فإن:

$$f_1(\mathbf{x}) = \dots = f_n(\mathbf{x}) = 0,$$

وكل مشتقة اتجاهية عند $\mathbf{x}$ تكون صفراً:

$$D_u f(\mathbf{x}) = 0.$$

٧ - أثبت أنه إذا كانت f دالة على E^2 بحيث إن f_1 و f_2 محدودتان داخل كرة ما $N_r(\mathbf{x})$ ، فإن f متصلة عند **x**.

(ارشاد: استعن بالنظرية المساعدة 15.1).

٨ - أثبت أنه إذا كانت f دالة على E^2 بحيث أن f_1 و f_2 محدودتان في فئة مفتوحة D، فإن f متصلة على D.

15.3 قاعدة السلسلة The Chain Rule

في النظرية أحادية البعد كان مفهوم الدالة التراكيبية (composite) مفهوماً بسيطاً، ففي المناهج الأولية تذكر عادة الدالة التراكيبية بوصفها «دالة الدالة». وبهذه الصياغة تكفل لنا قاعدة السلسلة حساب المشتقة لمثل هذا التراكب بسهولة. وفي النظرية متعددة الأبعاد تبدأ التعقيدات من الفكرة الأولية عن الدالة التراكيبية. على سبيل المثال فإنه يمكن أن يكون لدينا n من الدوال المختلفة $g^{(1)}, \ldots, g^{(n)}$ لتعيين الاحداثيات n للنقطة **q** في نطاق f، بذلك فإن: $F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_n) = f(g^{(1)}(\mathbf{x}), \ldots, g^{n}(\mathbf{x}))$.

وعلينا في هذه الحالة أن نبحث عن قاعدة السلسلة التي تعطي المشتقات الجزئية للدالة F بدلالة المشتقات الجزئية للدوال $g^{(n)}$ ، .... ، $g^{(1)}$ ، f . وبالتأكيد فإن هذه النتيجة قابلة للاستنتاج. وفي الواقع فإنه بشروط الاتصال تكون المشتقات الجزئية للدالة F بالاحداثي **i** هي صورة النقطة:

$\left(g_i^{(1)}(\mathbf{x}), \ldots, g_i^{(n)}(\mathbf{x})\right)$ بتأثير الدالة الخطية $df_{\mathbf{q}}$ ، حيث $\mathbf{q} = \left(g^{(1)}(\mathbf{x}), \ldots, g^{(n)}(\mathbf{x})\right)$. يمكننا التعبير عن ذلك بفعالية أكثر بالاستعانة بالتمثيل بواسطة المصفوفات للدالة الخطية $df_{\mathbf{q}}$ ، كحاصل ضرب مصفوفتين:

$$f_1(\mathbf{x}) = \left[f_1(\mathbf{q})\ f_2(\mathbf{q}) \ldots f_n(\mathbf{q})\right] \begin{bmatrix} g_i^{(1)}(\mathbf{x}) \\ g_i^{(2)}(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_i^{(n)}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

ولتجنب الغوص في صعوبات الرموز لن نثبت هنا قاعدة السلسلة للحالة نونية الأبعاد. وبدلاً من ذلك نثبتها في حالة خاصة عندما $n = 2$. وهذا يسمح لنا بالعمل بدون الأدلة الفوقية باستخدام h و g بدلاً من $g^{(1)}$ و $g^{(2)}$.

نظرية 15.4 : قاعدة السلسلة في E^2.

نفرض أن كلاً من f و g و h دالة في E^2 . نفرض أن للدالتين g و h مشتقات جزئية متصلة في كرة حول النقطة **x**، وأن للدالة f مشتقات جزئية متصلة في كرة مفتوحة حول النقطة **q** حيث $\mathbf{q} = \big(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\big)$. وإذا كانت F هي الدالة التراكيبية المعطاة بالصيغة $F(\mathbf{p}) = f\big(g(\mathbf{p}), h(\mathbf{p})\big)$ ، فإن F لها مشتقتان جزئيتان متصلتان في كرة مفتوحة حول **x**، معطاتان بالصيغتين:

$$F_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{q})\, g_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{q})\, h_1(\mathbf{x}),$$

$$F_2(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{q})\, g_2(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{q})\, h_2(\mathbf{x}). \qquad (1)$$

ملاحظة : برموز ليبنتز (Leibnitz) الشائعة تأخذ العلاقتان (1) الصورة:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial g}\,\frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial h}\,\frac{\partial h}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial g}\,\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial h}\,\frac{\partial h}{\partial x_2}.$$

البرهان:

لدينا $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ و $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2)$ ونعرّف أيضاً:

$$\Delta\mathbf{q} = \big(g(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\big)\ ,\ h(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})\big). \qquad (2)$$

ومن خاصية التقريب (النظرية 15.1) لدينا:

$$g(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = dg_{\mathbf{x}}(\Delta\mathbf{x}) + R_h(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x}),$$

$$h(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}) = dh_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + R_h(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x}),$$

و

$$F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}) - f(\mathbf{q}) = df_{\mathbf{q}}(\Delta\mathbf{q}) + R_f(\mathbf{q}, \Delta\mathbf{q}),$$

حيث تؤول الحدود الباقية R_g و R_h و R_f إلى الصفر بسرعة. وتعويض هذه الصيغ في (2) نحصل على:

$$\Delta \mathbf{q} = \left(dg_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x}) \text{ ، } dh_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x})\right) + \left(R_g(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}) \text{ ، } R_h(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x})\right),$$

مما يعطي:

$$df_{\mathbf{q}}(\Delta \mathbf{q}) = df_{\mathbf{q}}\left(dg_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x}) \text{ ، } dh_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x})\right) + df_{\mathbf{q}}\left(R_g(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}) \text{ ، } R_h(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x})\right).$$

وبذلك فإن:

$$F(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) = df_{\mathbf{q}}\left(dg_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x}) \text{ ، } dh_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x})\right) + R(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}). \qquad (3)$$

حيث

$$R(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}) = df_{\mathbf{q}}\left(R_g(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}) \text{ ، } R_h(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x})\right) + R_f(\mathbf{q}, \Delta \mathbf{q}), \qquad (3a)$$

ونلاحظ أن $\mathbf{q}, \Delta \mathbf{q}$ في الحد الأخير تتحددان بـ $\mathbf{x}$ و $\Delta \mathbf{x}$. والآن ومن تعريف $df_{\mathbf{q}}$ نحصل على:

$$\begin{aligned} df_{\mathbf{q}}\left(dg_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x}) \text{ ، } dh_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x})\right) &= f_1(\mathbf{q})\, dg_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x}) + f_2(\mathbf{q})\, dh_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x}) \\ &= f_1(\mathbf{q}) \left\{g_1(\mathbf{x})\, \Delta x_1 + g_2(\mathbf{x})\, \Delta x_2\right\} \qquad (4) \\ &+ f_2(\mathbf{q}) \left\{h_1(\mathbf{x})\, \Delta x_1 + h_2(\mathbf{x})\, \Delta x_2\right\}. \end{aligned}$$

وللحصول على المشتقة الجزئية $F_1(\mathbf{x})$ ، نضع في (4) صفراً بدلاً من Δx_2 ثم نعوض في (3)، وبعد ذلك نكوّن خارج قسمة الفرق بالقسمة على Δx_1 ، والنتيجة هي:

$$\begin{aligned} \frac{F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - F(\mathbf{x})}{\Delta x_1} &= \frac{f_1(\mathbf{q}) \left\{g_1(\mathbf{x})\, \Delta x_1 + 0\right\}}{\Delta x_1} \\ &+ \frac{f_2(\mathbf{q}) \left\{h_1(\mathbf{x})\, \Delta x_1 + 0\right\}}{\Delta x_1} + \frac{R(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x})}{\Delta x_1} \qquad (5) \\ &= f_1(\mathbf{q})\, g_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{q})\, h_1(\mathbf{x}) + \frac{R(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x})}{\Delta x_1}. \end{aligned}$$

وبالمثل، للحصول على $F_2(\mathbf{x})$ نستخدم $\Delta\mathbf{x} = (0, \Delta x_2)$ ونصل إلى:

$$\frac{F(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x}) - F(\mathbf{x})}{\Delta x_2} = f_1(\mathbf{q})\, g_2(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{q})\, h_2(\mathbf{x}) + \frac{R(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})}{\Delta x_2} \quad . (6)$$

بمقارنة (5) و (6) بحدود الطرف الأيمن لـ (1)، نرى أن إثبات (1) يكافىء إثبات أن الحد الباقي $R(\Delta, \Delta\mathbf{x}) / \Delta x_i$ يؤول إلى الصفر عندما Δx_i يؤول إلى الصفر ($i = 1$ أو 2).

وبما أنّ $df_{\mathbf{q}}$ دالة خطية يمكننا ضرب (3a) في $1 / |\Delta x_i|$ لنحصل على:

$$\frac{R(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x})}{|\Delta x_i|} = df_{\mathbf{q}}\left(\frac{R_g(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x})}{|\Delta x_i|}), \frac{R_h(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x})}{|\Delta x_i|} + \frac{R_f(\mathbf{q}, \Delta\mathbf{q})}{|\Delta x_i|} \right). \qquad (7)$$

وعندما تؤول Δx_i إلى الصفر يؤول الاحداثيان في الحد الأول إلى الصفر وتكون $df_{\mathbf{q}}$ متصلة عند $\mathbf{0}$. وبذلك فالحد الأول يؤول إلى $df_{\mathbf{q}}(\mathbf{0})$ ، الذي يساوي الصفر (نظراً لخطية $df_{\mathbf{q}}$). ولكي نبيّن أن الحد الثاني في (7) يؤول إلى الصفر، نتذكر أن:

$$\Delta\mathbf{q} = \left(dg_{\mathbf{x}}(\Delta\mathbf{x}) + R_g(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x}) \text{ ، } dh_{\mathbf{x}}(\Delta\mathbf{x}) + R_h(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x})\right).$$

وبما أن $dh_{\mathbf{x}}$ ، $dg_{\mathbf{x}}$ خطيّان فإنه يوجد عدد M بحيث إن:

$$|dg_{\mathbf{x}}(\Delta x_i)| \leqslant M|\Delta x_i| \quad \text{و} \quad |dh_{\mathbf{x}}(\Delta x_i| < M|\Delta x_i|;$$

وبما أن:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \left[\frac{R_h(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x})}{\Delta x_i} \right] = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta x_i \to 0} \left[\frac{R_g(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x})}{\Delta x_i} \right] = 0$$

ويمكننا اختيار M كبيرة بدرجة كافية لكي يكون:

$$|R_g(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x})| \leqslant M|\Delta x_i| \quad \text{و} \quad |R_h(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x})| \leqslant M|\Delta x_i|.$$

وبذلك ينتج أن:

$$\|\Delta\mathbf{q}\| \leqslant 4M|\Delta x_i|.$$

وبذلك فإن:

$$\frac{|R_f(\mathbf{q}, \Delta\mathbf{q})|}{|\Delta x_j|} \leqslant \frac{4M\,|R_f(\mathbf{q}, \Delta\mathbf{q})|}{||\Delta\mathbf{q}||}$$

وحيث إن $\lim_{\Delta x_j \to 0} ||\Delta\mathbf{q}|| = 0$ فإننا نستنتج أن الحد الثاني في 7 يؤول إلى الصفر عندما يؤول Δx_i إلى الصفر مما يكمّل البرهان.

نستعرض قاعدة السلسلة في المثال التالي.

وحيث إن هذا النمط من المسائل يعتبر عادياً في حساب التفاضل الأولي فإن هدفنا الأساسي هنا هو تعويد أنفسنا على الرموز.

مثال 15.15:

نعرّف الدوال f,g,h و F كما يلي:

$$f(\mathbf{x}) = x_1x_2^2,\ \ g(\mathbf{x}) = x_1 \sin x_2,\ \ h(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2,$$

و

$$F() = f(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})).$$

عندئذٍ فمن (1) نحصل على:

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}) &= f_1(g(\mathbf{x}),\ h(\mathbf{x}))\, g_1(\mathbf{x}) + f_2(g(\mathbf{x}),\ h(\mathbf{x}))\, h_1(\mathbf{x}) \\ &= [h(\mathbf{x})]^2 \sin x_2 + 2g(\mathbf{x})\, h(\mathbf{x}) \cdot 2x_1 \\ &= (x_1^2 - x_2)^2 \sin x_2 + 4x_1^2 (\sin x_2)\, (x_1^2 - x_2) \\ &= (x_1^2 - x_2)\, [5x_1^2 - x_2] \sin x_2. \end{aligned}$$

وأيضاً:

$$\begin{aligned} F_2(\mathbf{x}) &= f_1(g(\mathbf{x}),\ h(\mathbf{x}))\, g_2(\mathbf{x}) + f_2(g(\mathbf{x}),\ h(\mathbf{x}))\, h_2(\mathbf{x}) \\ &= [h(\mathbf{x})]^2\, x_1 \cos x_2 + 2g(\mathbf{x})\, h(\mathbf{x})\, (-1) \\ &= (x_1^2 - x_2)^2\, x_i \cos x_2 - 2x_1 (\sin x_2)\, (x_1^2 - x_2) \\ &= (x_1^2 - x_2)\, x_2\, [(x_1^2 - x_2) \cos x_2 - 2x_1 \sin x_2] \end{aligned}$$

ومن السهل في هذا المثال أن نتحقق من المشتقات بكتابة F صراحة بدلالة x:

$$F(\mathbf{x}) = x_1 (\sin x_2) (x_1^2 - x_2)^2.$$

والآن يمكن حساب F_1 و F_2 مباشرة، والمقارنة مع العلاقات الناتجة.

تمارين 15.3

1 - معطى أن $f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2$ ، $g(\mathbf{x}) = \cos(2x_1 + x_2)$ ، $h(\mathbf{x}) = \sin(x_1 + 3x_2)$ ، $F(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$ عيّن $F_2(\mathbf{x})$ ، $F_1(\mathbf{x})$.

2 - معطى أن $g(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2$ ، $f(\mathbf{x}) = \log x_1 x_2$ ، $h(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2$ ، $F(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$ ، عيّن $F_2(\mathbf{x})$ ، $F_1(\mathbf{x})$.

3 - نفرض أن $F(\mathbf{x}) = (g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$ حيث f_2 ، f_1 موجودتان، $g(\mathbf{x}) = x_1 \cos x_2$ ، $h(\mathbf{x}) = x_1 \sin x_2$ بيّن أن:

$$F_1(\mathbf{x}) \cos x_2 - F_2(\mathbf{x}) \frac{\sin x_2}{x_1} = f_1(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})),$$

و

$$F_1(\mathbf{x}) \sin x_2 + F_2(\mathbf{x}) \frac{\cos x_2}{x_1} = f_2(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})),$$

$$[f_1(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))]^2 + [f_2 g((\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))]^2 = [F_1(\mathbf{x})]^2 + \frac{1}{x_1^2} [F_2(\mathbf{x})]^2.$$

15.4 قانون القيمة الوسطى (The Law of the Mean)

النتيجة التالية هي قانون من نمط قانون المتوسط (نظرية القيمة الوسطى) للدوال في E^n. ولا يوجد بالطبع تفسير هندسي للحالة نونية البعد مثل ذلك التفسير المعروف للدوال المعرفة على فترة في E^1 (انظر شكل 6.1). ومع ذلك فهناك تعميم صحيح بالمعنى التحليلي. ولنتذكر أن قانون المتوسط ينص على وجود عدد c بين a, b بحيث إن $f(b - a) = f'(c)(b - a)$ ، وحيث إنّ f دالة قابلة للتفاضل على [a, b]. وحيث إن

$f'(c)\,(b-a)$ هي قيمة التفاضل df_c عند العدد $(b-a)$ ، فإن ذلك يفرض علينا ضرورة البحث عن نقطة متوسطة حيث يأخذ التفاضل قيمة الفرق بين قيمتي الدالة.

نظرية 15.5 : قانون القيمة الوسطى.

إذا كانت f دالة على E^n ذات مشتقات جزئية متصلة في كرة مفتوحة تحتوي على النقطتين **x, y** فإنه توجد نقطة **p** على الجزء المستقيم بين **x, y** بحيث إن $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = df_{\mathbf{p}}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$.

البرهان:

على الرغم من أن النتيجة صحيحة في E^n لكل n فإننا نثبتها في حالة $n = 2$. نفرض أن $\Delta\mathbf{x}$ ترمز إلى $\mathbf{y} - \mathbf{x} = (y_1 - x_2 ، y_2 - x_2)$. ويجب أن نبين أن هناك عدداً t^* بين 0 و 1 بحيث إنه إذا كان $\mathbf{p} = \mathbf{x} + t^*(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ فإن:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{p})\,\Delta x_1 + f_2(\mathbf{p})\,\Delta x_2.$$

نعرّف الدالة F من $[0, 1]$ إلى ـ في E^1 كدالة تراكيبية (composite)

$$F(t) = f(\mathbf{x} + t[\mathbf{y} - \mathbf{x}]) = f(x_1 + t\Delta x_1,\ x_2 + t\Delta x_2).$$

ومن قاعدة السلسلة فإن F قابلة للتفاضل على $[0, 1]$ ولذا وفقاً لقانون القيمة الوسطى (نظرية 6.3) يوجد عدد t^* بحيث إن:

$$F'(t^*) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}).$$

وإذا كانت $\mathbf{p} = \mathbf{x} + t^*[\mathbf{y} - \mathbf{x}]$ ، فإننا نحصل من النظرية 15.4 على:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = F'(t^*) = F_1(t^*)$$

$$= f_1(\mathbf{p})\,\frac{d}{dt}\,[x_1 + t\Delta x_1] + f_2(\mathbf{p})\,\frac{d}{dt}\,[x_2 + t\Delta x_2]$$

$$= f_2(\mathbf{p})\,\Delta x_1 + f_2(\mathbf{p})\,\Delta x_2$$

$$= df_{\mathbf{p}}\,(\Delta\mathbf{x}).$$

لاحظنا في مثال 15.1 تساوي المشتقات الجزئية المختلطة من الرتبة الثانية مثل f_{21} ، f_{12} . وفي النظرية التالية نثبت أن هذه المساواة تتحقق طالما كانت إحدى هاتين المشتقتين المختلطتين متصلة. وكما سبق فإننا نتجنب الحالة العامة نونية الأبعاد وندرس فقط الصياغة في حالة البعدين. والنتيجة صالحة، مع ذلك، للدوال في E^n . بالفعل، فالبرهان الذي نورده للدالة في E^2 سيكون صالحاً لأي عدد من الأبعاد. والسبب يكمن في الاحتفاظ عند حساب f_{21} ، f_{12} بجميع الاحداثيات ثابتة ما عدا احداثيين اثنين.

نظرية 15.6 تساوي المشتقات الجزئية المختلطة:

نفرض أن f دالة على E^2، بحيث إن f_1, f_2 و f_{21} موجودة داخل كرة ما $\mathbf{N}_r(\mathbf{x})$ ، وأن f_{21} متصلة على $\mathbf{x}$، عندئذ تكون f_{21} موجودة عند $\mathbf{x}$ ويكون $f_{12}(\mathbf{x}) = f_{21}(\mathbf{x})$.

البرهان:

نفرض أن $\Delta\mathbf{x}$ نقطة قريبة بدرجة كافية من $\mathbf{0}$ بحيث إن $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \in \mathbf{N}_r(\mathbf{x})$ ، وتُعرَّف الدوال ϕ (على $D \subset E^2$) و g (على $(-\delta ، \delta) \subset E^2$) بالصيغتين:

$$\phi(\Delta x_1, \Delta x_2) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2) + f(x_1, x_2) \qquad (1)$$

و

$$g(t) = f(x_1 + \Delta x_1, t) - f(x_1, t).$$

(لاحظ أن g مُعرَّفة لقيمة خاصة Δx_1 ، تبقى بعد ذلك غير متغيرة). عندئذ فإن:

$$\phi(\Delta\mathbf{x}) = g(x_2 + \Delta x_2) - g(x_2).$$

وبما أن f_2 موجودة داخل $\mathbf{N}_r(\mathbf{x})$ فإن h قابلة للتفاضل عندما تكون t قريبة من x_2. وبذلك ووفقاً لقانون المتوسط (نظرية 6.3) يوجد عدد ما t_2 في $(0, 1)$ بحيث إن:

$$\begin{aligned}\phi(\Delta\mathbf{x}) &= g'(x_2 + t_2\Delta x_2)\,\Delta x_2 \\ &= \left\{f_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + t_2\Delta x_2)) - f_2(x_1, x_2 + t_2\Delta x_2)\right\} \Delta x_2.\end{aligned} \qquad (2)$$

والآن نأخذ بالاعتبار $f_2(x_1, x_2 + t_2\Delta x_2)$ كدالة في x وهي قابلة للتفاضل، لأن f_{21} موجودة، ولذا يمكن استخدام قانون المتوسط (النظرية 6.3) لكتابة:

$$\left\{f_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + t_2\Delta x_2) - f_2(x_1, x_2 + t_2\Delta x_2)\right\}$$
$$= f_{21}(x_1 + t_1\Delta x_1, x_2 + t_2\Delta x_2)\,\Delta x_1,$$

لقيمة ما لـ t_1 في $(0, 1)$. وبتعويض هذه الصيغة في (2) نحصل على:

$$\phi(\Delta \mathbf{x}) = \Delta x_1 \Delta x_2 f_{21}(x_1 + t_1\Delta x_1, x_2 + t_2\Delta x_2);$$

وبذلك فإن:

$$\frac{\phi(\Delta \mathbf{x})}{\Delta x_1 \Delta x_2} = f_{21}(x_1 + t_1\Delta x_1, x_2 + t_2\Delta x_2). \tag{3}$$

وبما أن f_{21} متّصلة عند **x**، فإن الطرف الأيمن للعلاقة (3) يؤول إلى $f_{21}(\mathbf{x})$ عندما يؤول كل من Δx_1 و Δx_2 إلى الصفر أي عندما $\|\Delta \mathbf{x}\|$ تؤول إلى الصفر. ومن ثم فإن:

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} \left[\frac{\phi(\Delta \mathbf{x})}{\Delta x_1 \Delta x_2}\right] = f_{21}(\mathbf{x}). \tag{4}$$

ويضمن لنا اتصال f_{21} أن النهاية (4) هي نفسها مهما كان المسار الذي عليه تؤول $\Delta \mathbf{x}$ إلى **0** . وبذلك يمكننا حساب هذه النهاية بطريقة النهاية المكررة أولاً بجعل Δx_1 تؤول إلى الصفر ثم بعد ذلك جعل Δx_2 تؤول إلى الصفر. ولتطبيق ذلك نعرف دالة عددية أخرى h بالصيغة:

$$h(s) = f(s, x_2 + \Delta x_2) - f(s, x_2). \tag{5}$$

من (1) نحصل على:

$$\frac{\phi(\Delta \mathbf{x})}{\Delta x_1 \Delta x_2} = \frac{1}{\Delta x_2}\,\frac{h(x_1 + \Delta x_1) - h(x_1)}{\Delta x_1}. \tag{6}$$

ونعلم أن h قابلة للتفاضل، لأن f_1 موجودة ولذا يتقارب خارج قسمة الفرق في الطرف الأيمن للعلاقة (6) عندما تؤول x_1 إلى الصفر. وبتجميع ذلك مع (5) نحصل على:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \left[\frac{\phi(\Delta \mathbf{x})}{\Delta x_1 \Delta x_2} \right] = \frac{1}{\Delta x_2} \quad h'(x_1) \tag{7}$$

$$= \left[\frac{1}{\Delta x_2} \right] \left\{ f_1(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f_1(x_1, x_2) \right\}.$$

والطرف الأيمن هو خارج قسمة الفرق لـ $f_{12}(\mathbf{x})$ وقد افترضنا وجـود f_{12} . بذلـك وبجعل Δx_2 تؤول إلى الصفر في (7) نجد:

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \left\{ \lim_{\Delta x_1 \to 0} \left[\frac{\phi(\Delta \mathbf{x})}{\Delta x_1 \Delta x_2} \right] \right\} = f_{12}(\mathbf{x}). \tag{8}$$

ومن ثم وفقاً لـ (4) و (8) نحصل على $f_{12}(\mathbf{x}) = f_{21}(\mathbf{x})$.

تماريـن 15.15

1 ـ معطى أن $f(\mathbf{x}) = ||x||^2$ ، أوجد نقـطة **p** على الجـزء المستقيم من $\mathbf{e}^{(1)} = (1, 0)$ إلى $\mathbf{e}^{(2)} = (0, 1)$ الذي يحقّق قانون المتوسط، أي:

$$f(\mathbf{e}^{(2)}) - f(\mathbf{e}^{(1)}) = df_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}^{(2)} - \mathbf{e}^{(1)}).$$

2 ـ معطى $f(\mathbf{x}) = 3x_1 + x_2^2$ ، أوجد النقطة **p** كما في تمرين (1).

3 ـ أوجـد كل المشتقـات الجزئيـة من الرتبـة الثانيـة وتحقق من تساوي المشتقـات الجزئيـة المختلطة:

(أ) $f(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2}$. (ب) $g(\mathbf{x}) = x_1 \sin x_2$. (ج) $h(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1^2 \cos x_2}{||x||^2}$

4 ـ عَرِّف $f(\mathbf{0}) = 0$ ، وعندما $\mathbf{x} \neq 0$ تكون:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{||x||^2} .$$

أوجـد $f_1(0, x_2)$ ، $f_2(x_1, 0)$ واستعن بهـما لتعيـين $f_{12}(\mathbf{0})$ ، $f_{21}(\mathbf{0})$. لماذا لا تتناقض النتيجة $f_{12}(\mathbf{0}) \neq f_{21}(\mathbf{0})$ مع النظرية 15.6؟

15.6 نظرية الدالة الضمنية

The Implicit function Theorem

يوجد في حساب التفاضل والهندسة التحليلية وضع ترتبط فيه كميتان بقاعدة ما أو معادلة ما ونأمل أن تتحدد احدى الكميتين كدالة في الأخرى. على سبيل المثال يمكن وصف فئة من النقط في E^2 ككل النقط التي تحقق احداثياتها المعادلة:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = 0 \tag{1}$$

تعطى المعادلة (1) علاقة ضمنية بين x_1 ، x_2 ، ونتوقع وجود دالة عددية ϕ بحيث إن:

$$x_2 = \phi(x_1) \tag{2}$$

تصف نفس النقط المعطاة بالمعادلة (1). المعادلة (2) هي علاقة صريحة بين x_1 ، x_2 . ومن المفضل دائماً أن يكون لدينا علاقة صريحة لاضمنية، ولكن ليس من الممكن دائماً الحصول على ذلك. ويمكن ملاحظة ذلك من العلاقة الضمنية المعروفة التالية.

مثـــال 15.6:

نفرض أن C هي «دائرة الوحدة» في E^2 ، أي أن C تتكون من كل النقط $\mathbf{x}$ بحيث إن

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \tag{3}$$

ومن السهل حل x_2 بدلالة x_1 :

$$x_2 = \pm\sqrt{1 - x_1^2}\,; \tag{4}$$

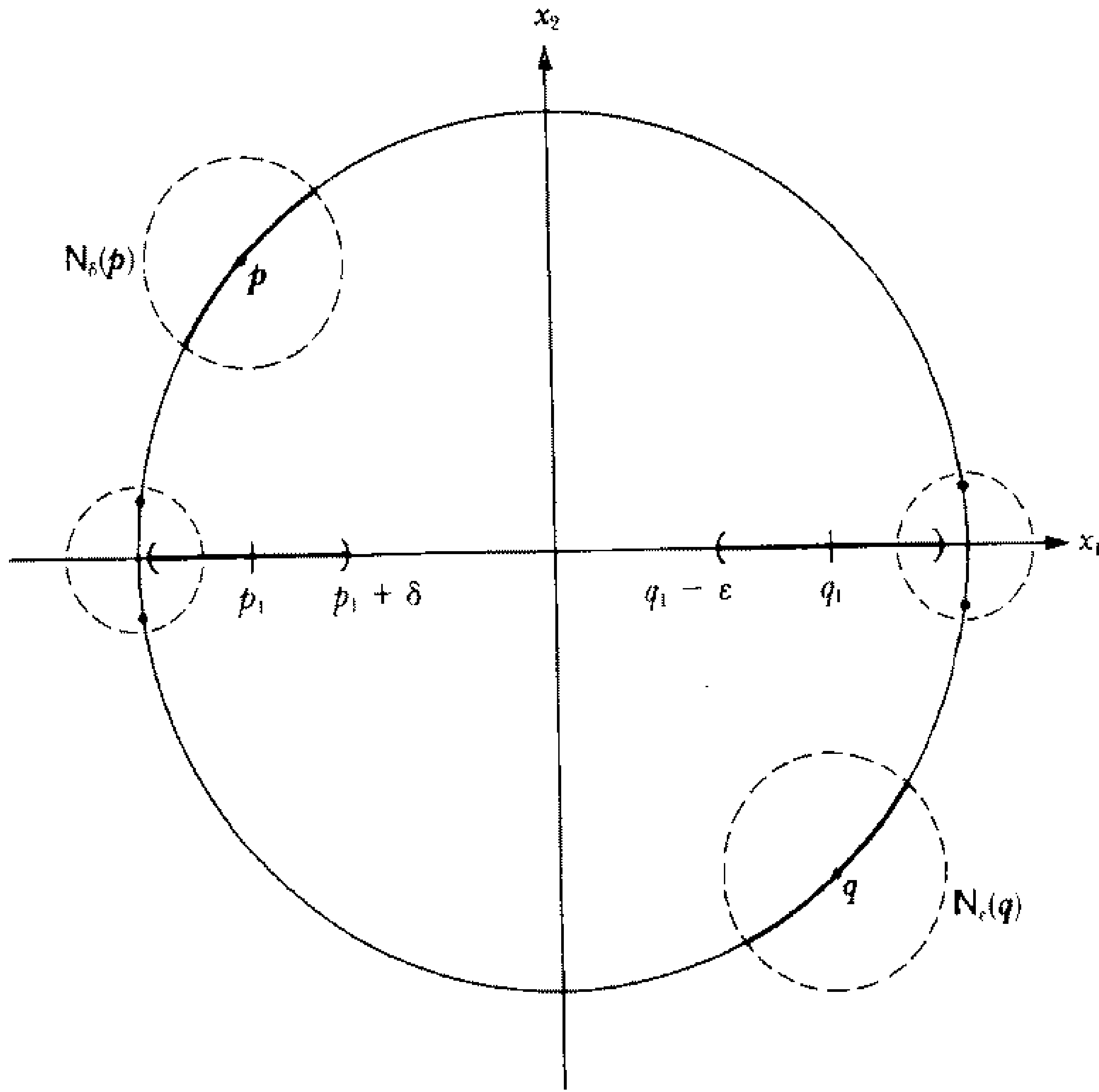
ولكن هذه العلاقة لا تعطي x_2 كدالة في x_1، لأنه لكل x_2 بين 1 و -1 توجد قيمتان لـ x_2 تحققان العلاقة (4). ولتعريف دالة $\phi(x_1)$ أحادية القيمة لـ x_2، نحدّد (localize) المسألة. وبذلك فلا نحاول اعطاء دالة واحدة ϕ بحيث إنه لكل x_2 في $[-1, 1]$ يكون:

$$x_1 + \phi(x_1)^2 = 1. \tag{5}$$

وبدلاً من ذلك نأخذ في اعتبارنا تلك النقط من C في جوار ما للنقطة $\mathbf{p}$ على C (انـظر شكل

15.1). عنـدئـذٍ يمكننـا أن نعـيّن دالـة ϕ تحقق (5) لجميـع قيم x_1 في فـترة مـا $p_1 - \delta < x_1 < p_1 + \delta$. واضح من الشكل 15.1 أنه يمكننا اختيار:

$$\phi(x_1) = \sqrt{1 - x_1^2} \text{ ، } x \in N_\delta(p);$$



شكل (15.1)

ومن الممكن أيضاً اختيار:

$$\phi^*(x_1) = -\sqrt{1 - x_1^2} \text{ ، } x \in N_\delta(q);$$

ولكن لا تـوجد دالـة ϕ في أي جوار للنقـطة $(1, 0)$ أو $(-1, 0)$ تحقق (5)، لأن كل كـرة حول $(1, 0)$ أو حول $(-1, 0)$ تحتوي زوجاً من النقط ذات الاحداثي الأول نفسه.

ويبرر المثال السابق ضرورة النظريـة التاليـة ويستعرضهـا في آن واحد. إنها نـظرية وجـود بحتة (pure «existence theorem») تضمن لنا وجود دالة ضمنية ما دون أن تعـطينا طـريقة لتعيـين هذه الـدالة. ومـع ذلك فهي تعـطي علاقـة صريحة لمشتقـة هـذه الـدالـة «الضمنيـة المراوغة».

نظرية 15.7 : نظرية الدالة الضمنية.

نفرض أن f دالة ذات نطاق D في E^2 ، وأن **p** نقطة في $D°$. إذا كانت $f(\mathbf{p}) = 0$ ، $f_2(\mathbf{p}) \neq 0$ ، وكانت f_1، f_2 متصلتين في كرة ما $N_r(\mathbf{p})$:

فإنه توجد فترة مفتوحة I_1 حول p_1 وفترة مفتوحة I_2 حول p_2 ودالة وحيدة ϕ من I_1 إلى - في I_2 بحيث يكون:

(i) لكل x_1 في I_1 : $(x_1 ، \phi(x_1))$ في $N_r(\mathbf{p})$ و $f(x_1 ، \phi(x_1)) = 0$ ؛

(ii) $\phi(p_1) = p_2$ ؛

(iii) ϕ متصلة على I_1 ؛

(iv) إذا كانت f_1 متصلة داخل $N_r(\mathbf{p})$ ، فإن ϕ' موجودة ومتصلة على I_1، ولكل x_1 في I_1 تكون

$$\phi'_1(x_1) = -\frac{f_1(x_1, \phi(x_1))}{f_2(x_1, \phi(x_1))} .$$

البرهان:

حيث إن f_2 متصلة وغير مساوية للصفر عند **p** فإنه توجد فترتان مغلقتان J_1 حول p_1 ، J_2 حول p_2 بحيث يكون:

$$J_1 \times J_2 = \{\mathbf{x} \in E^2 : x_1 \in J_1 ، x_2 \in J_2\} \subseteq N_r(\mathbf{p})$$

و

إذا كان $\mathbf{x} \in J_1 \times J_2$ فإن $f_2(\mathbf{x}) \neq 0$.

نبيّن في البداية أنه لكل x_1 من J_1 يوجد على الأكثر قيمة واحدة x_2 من J_2 بحيث إن $f(x_1, x_2) = 0$. نفرض أن x'_2، x_2 هما هذان العددان اللذان يحققان المعادلة السابقة للقيمة x_1 نفسها. استناداً لقانون المتوسط (النظرية 6.3) يوجد عدد μ بين x_2 و x'_2 (وبذلك يكون μ في J_2) بحيث إن:

$$f_2(x_1, \mu) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x'_2)}{x_2 - x'_2} = 0;$$

ولكن $f_2(\mathbf{x}) \neq 0$ لقيم $\mathbf{x}$ في $J_1 \times J_2$. وهـذا التناقض يبين أن x_2 ، x'_2 لا يمكن أن تكونا مختلفتين. والآن نعرّف:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^2. \tag{6}$$

وبـذلـك فـإن $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = 0$ وإذا كـان $p_2 \pm c$ نقـطتي النهـايـة للفـترة J_2 ، فـإن $F(p_1, p_2 \pm c) \neq 0$. وبذلك فإذا عرفنا:

$$\varepsilon = 2 \min \left\{F(p_1, p_2 - c) \ , \ F(p_1, p_2 + c\right\},$$

فإن

$$F(p_1, p_2 \pm c) \geqslant 2\varepsilon > 0. \tag{7}$$

ولنعتبر مؤقتاً أن F دالـة في x_1 وأن x_2 مثبت عنـد احـدى القيم $p_2 - c,$ أو $p_2 + c$.
وبما أنّ F متصلة في x_1 فإنه توجد فترة مفتوحة $I_1 \subset J_1$ بحيث إنه لكل x_1 في I_1 ،

$$F(x_1, p_2) < \varepsilon \ ، \ F(x_1, p_2 \pm c) > \varepsilon. \tag{8}$$

والآن نعتبر F دالة على x_2 في J_2 : لكل x_1 (مثبت) في J_1 تكـون F متصلة في x_2 ولذا فهي تصل إلى قيمتها الصغرى على الفترة المغلقة J_2 ، وتبين (8) أن هذه القيمة الصغرى لا يمكن أن تظهر في نقطة من نقطتي النهاية. وإذا كانت x_2^* نقطة داخلية في J_2 حيث تظهر هذه القيمة الصغرى، فإنه وفقاً للنظرية المساعدة 6.1 يكون:

$$F_2(x_1, x_2^*) = 0. \tag{9}$$

وإذا أخذنا تفاضل (6) بالنسبة إلى x_2 وأخذنا في الاعتبار (9) نحصل على:

$$2f(x_1, x_2^*)\, f_2(x_1, x_2^*) = 0.$$

وحيث إنه لا يمكن لـ f_2 أن تنعدم عند هذه النقطة فإن ذلك يؤدي إلى:

$$f(x_1, x_2^*) = 0. \tag{10}$$

وبذلك نعرف الدالة ϕ على I_1 بالصيغة:

$$\phi(x_1) = x_2^*,$$

ونختار $I_2 = (J_2)^\circ$. بذلك نحصل مباشرة على أن ϕ تحقق النتيجتين (ii). (i).

ولإثبات أن ϕ متصلة، نأخذ x_1 ، z_1 في I_1 ونستعين بقانون المتوسط لنكتب:

$$\begin{aligned}0 - 0 &= f(x_1, \phi(x_1)) - f(z_1, \phi(z_1)) \\ &= \left[f(x_1, \phi(x_1)) - f(x_1, \phi(z_1))\right] + \left[f(x_1, \phi(z_1)) - f(z_1, \phi(z_1))\right] \\ &= f_2(x_1, \mu)\,[\phi(x_1) - \phi(z_1)] + \left[f(x_1, \phi(z_1)) - f(z_1, \phi(z_1))\right]\end{aligned}$$

لـ μ ما بين $\phi(x_1)$ ، $\phi(z_1)$. ولذا فإن:

$$\phi(x_1) - \phi(z_1) = - \frac{f(x_1, \phi(z_1))\ \ f(z_1, \phi(z_1))}{f_2(x_1, \mu)} . \qquad (11)$$

والآن فإن اتصال f وعدم انعدام f_2 على $I_1 \times I_2$ يؤديان إلى:

$$\lim_{x_1 \to z_1} \left[\phi(x_1) - \phi(z_1)\right] = 0;$$

أي أن ϕ متصلة عند z_1.

وأخيراً لإثبات (iv) نفرض أن f_1 موجودة ونطبق قانون المتوسط على بسط الطرف الأيمن للعلاقة (11). وهذا يعطي عدداً ξ بين x_1، z_1 حيث:

$$\phi(x_1) - \phi(z_1) = - \frac{f_1(\xi, \phi(z_1))\,[x_1 - z_1]}{f_2(x_1, \mu)} ,$$

أو

$$\frac{\phi(x_1) - \phi(z_1)}{x_1 - z_1} = - \frac{f_2(\xi, \phi(z_1))}{f_2(x_1, \mu)} . \qquad (12)$$

وتتحقق المعادلة (12) لأي x_1 ، z_1 ، في I_1 ، وعندما تؤول x_1 إلى z_1 يكون لدينا أيضاً أن ξ تؤول إلى z_1 وتؤول $\phi(x_1)$ إلى $\phi(z_1)$ ، مما يؤدي إلى أن μ يؤول إلى $\phi(y_1)$. ومع اتصال f_1, f_2 يعطى ذلك:

$$\phi'(z_1) = \lim_{x_1 \to z_2} - \frac{f_1(\xi, \phi(z_1))}{f_2(x_1, \mu)} = - \frac{f_1(z_1, \phi(z_1))}{f_2(z_1, \phi(z_1))} . \qquad (13)$$

وكما تبيّن المعادلة (13) فإن ϕ' هي النسبة بين دالتين متصلتين، وبالتالي فهي نفسها (أي **ϕ'**) دالة متصلة، وهكذا يكتمل البرهان.

ولنظرية الدالة الضمنية صور وتعميمات متعددة. وعلى وجه العموم إذا وجدت **معادلة** تعطي علاقة أو ارتباطاً بين $m + n$ من المتغيرات فإننا نرغب في معرفة ما إذا كان **يمكن** إعطاء m من المتغيرات كتحويلات (حسنة السلوك) من المتغيرات n المتبقية. ومن بين **الصور** العديدة لنظرية الدالة الضمنية نورد نصاً واحداً آخر.

نظرية 15.8:

نفرض أن f دالة نطاقها D في E^3 وأن **p** نقطة في D°. إذا كان

$f(\mathbf{p}) = 0$ ، $f_3(\mathbf{p}) \neq 0$ و f_2 و f, f_1 متصلة في كرة ما $\mathbf{N}_r(\mathbf{p})$:

فإنه توجد فترات مفتوحة I_1 حول p_1، I_2 حول p_2 ، I_3 حول p_3 ودالة وحيدة ϕ **من** $I_1 \times I_2$ إلى ـ في (into) I_3 بحيث إن:

(i) لكل **x** في $I_1 \times I_2 \times I_3$ تكون $(x_1, x_2 ، \phi(x_1, x_2))$ في $\mathbf{N}_r(\mathbf{p})$ و $f(x_1, x_2 ، \phi(x_1, x_2)) = 0$.

(ii) $\phi(p_1, p_2) = p_3$.

(iii) ϕ متصلة على $\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2$.

(iv) ϕ_1، ϕ_2 موجودتان ومتصلتان على $\mathbf{N}_r(\mathbf{p})$ ولكل (x_1, x_2) في $I_1 \times I_2$ يكون:

$$\phi_1(x_1, x_2) = -\frac{f_1((x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))}{f_3(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))} ,$$

و

$$\phi_2(x_1, x_2) = -\frac{f_2(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))}{f_3(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))}$$

تمارين 15.16

حدّد في التمارين 1-5 ما إذا كانت الدالة تحقق فرضيات النظرية 15.7 (أو 15.8) في جوار النقطة المعطاة **p**.

1 - $\mathbf{p} = (0, 1) \;\; ; \;\; f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$

2 - $\mathbf{p} = (1, 0) \;\; ; \;\; f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$

3 - $\mathbf{p}\ (0, 0, 1) \;\; ، \;\; f(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} - \cos x_3$

4 - $\mathbf{p} = (1, 1) \;\; ; \;\; f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + \log x_1 x_2$

5 - $\mathbf{p} = (0, 0) \;\; ; \;\; f(\mathbf{x}) = \left\{(x_1^2 + x_2^2)\,(1 - [x_1^2 + x_2^2])\right\}^{1/2}$

6 - هل توجد دالة ϕ على E^2 تكون متصلة عند $(1, 1)$ بحيث إن:

$$x_1^3 + x_2^3 + \left[\phi(x_1, x_2)\right]^3 - 3x_1x_2\,\phi(x_1, x_2) - 4 = 0$$

لجميع قيم **x** في جوار ما للنقطة $(1, 1)$؟

الفصل السادس عشر

16

المساحة والتكامل في E^2

Area and Integration in E^2

16.1 التكامل على فئة محدودة

Integration on a Bounded Set

النظرية التي نوضحها هنا بالتفصيل يمكن أن تنجز في E^n بدلاً من E^2 ، ولكن كما في السابق فإنه من الأسهل أن نتكلم عن المستوي ونتخيل أمثلة في المستوي. إذن نقدم النظرية في الحالة الخاصة وهي حالة البعدين.

بصفة عامة فإن التكامل يمثل قيمة متوسطة «average value» لدالة f على فئة جزئية D من نطاقها. هذه القيمة المتوسطة تقرب بجمع قيم الدالة f موزونة بمقاييس الفئة الجزئية من D والتي تحدد هذه القيمة المتوسطة.

لنفرض أن f دالة نطاقها الفئة المستطيلة $[a, b] \times [c, d]$ ، أي أن:

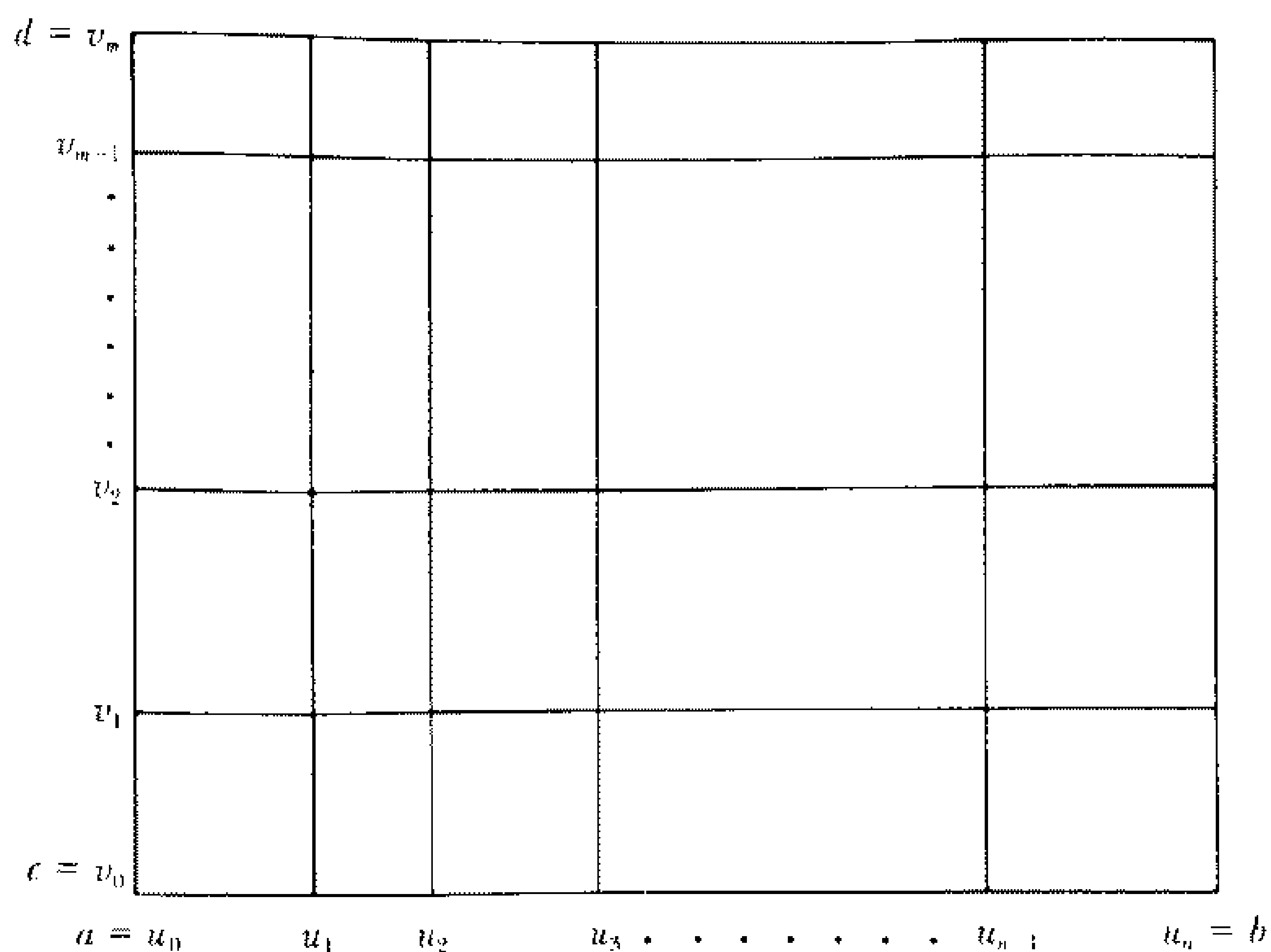
$$R = \left\{x \in E^2 : a \leqslant x_1 \leqslant b \quad \text{و} \quad c \leqslant x_1 \leqslant d\right\} \tag{1}$$

في كل هذا الفصل، تعني كلمة مستطيل الفئة التي على شكل (1)؛ أي أن أضلاعه موازية للاحداثيات السينية والصادية، وهي فئة مغلقة إلا إذا ذكر عكس ذلك. الشبكة $\mathcal{N}$ (net) على R هي فئة جزئية من R تحدد بالتجزيء $\mathcal{P}_1$ (partition) على $[a, b]$ والتجزيء $\mathcal{P}_2$ على $[c, d]$ ، إذن فإنّ

$$\mathcal{N} = \left\{x \in R : x_1 \in \mathcal{P}_1 \quad \text{أو} \quad x_2 \in \mathcal{P}_2\right\}$$

الفئة $\{x \in R : x_1 \in \mathcal{P}_1\}$ تتكون من عدد نهائي من الخطوط الموازية للمحور x_2 والتي تقع نقطها النهائية على حدود R. الفئة $\{x \in R : x_2 \in \mathcal{P}_2\}$ تتكون من عدد نهائي من الخطوط الموازية للمحور x_1 والتي تقع نقطها النهائية على حدود R.

إذن تحدّد الشبكة $\mathcal{N}$ عدداً نهائياً من المستطيلات المغلقة R_i والتي يكوّن اتحادها R أمّا تقاطعها هو على الأغلب خطاً (انظر شكل 16.1). ندع $A(R_i)$ تمثل مساحة المستطيل R_i الذي يكون ترتيبه i ولنفرض أن $\|\mathcal{N}\|$ تمثل معياراً للشبكة $\mathcal{N}$ والذي يعرّف بالقيمة العظمى لأطوال أقطار المستطيلات R_i.



شكل (16.1)

تعريف 16.1:

يقال: بأن الدالة f قابلة للتكامل على R بشرط أن تكون النهاية:

$$\lim_{\|\mathcal{N}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{p}^{(i)})\, A(R_i)$$

موجودة، في هذه الحالة فإن قيمة النهاية تدل على $\iint_R f$. ويعني مفهوم النهاية هذا أنه إذا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد موجب δ بحيث تكون لأي شبكة بمقياس أصغر من δ ولأي

فئة من النقاط $\left\{\mathbf{p}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ بحيث يكون $\mathbf{p}^{(i)} \in R_i$ ، فإن:

$$\left|\iint_R f - \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{p}^{(i)})\, A(R_i)\right| < \varepsilon.$$

مثـــال 16.1:

لنفـرض أن $f(x) = x_1$ لكل $\mathbf{x}$ في المستـطيـل R والمعـطى في (1). نفـرض أن f قـابلة للتكـامل عـلى R ونحسب قيمة التكـامل. لنفـرض أن $\mathscr{P}_1 = \left\{u_k\right\}_{k=0}^{n}$ تجـزيء للفـترة $[a, b]$ وأن $\mathscr{P}_2 = \left\{v_k\right\}_{k=0}^{m}$ تجزىء للفترة $[c, d]$ كما هو موضح في الشكل 16.1.

لنفـرض أن R_i هو المستـطيل ذو الـترتيب i والُمحدّد بـواسطة الشبكـة المقابلة للتجـزيئـين $\mathscr{P}_2$ ، $\mathscr{P}_1$. إذا كـان R_i هـو واحـد من m من المستـطيـلات بحيث إن لكـل $\mathbf{x}$ في R_i ، $u_{k-1} < x_1 \leqslant u_k$ ، فـإننـا نختـار $\mathbf{p}^{(i)}$ بحيث يكـون $\mathbf{p}^{(i)} = (u_1 + u_k)/2$ ، وهـذا يعطينا:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{mn} f(\mathbf{p}^{(i)})\, A(R_i) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\ (u_{k-1} + u_k)\, (u_k - u_{k-1})\, (d - c) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)(d - c) \sum_{k=1}^{n} (u_k^2 - u_{k-1}^2) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)(d - c)\, (u_n^2 - u_0^2) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)(d - c)\, (b^2 - a^2).
\end{aligned}$$

لهذا السبب، فإن لكـل شبكة عـلى R هناك اختيـار مناسب $\{\mathbf{p}^{(i)}\}$ يعـطي مجموعـاً تقريبيـاً قيمتـه $(d - c)\,(b^2 - a^2)/2$. هذه المجـاميع لا بـد أن تقرب إلى نهايـة؛ وذلـك يعـود لافـتراضنـا بقـابليـة f للتكـامـل، إذن فـإن القيمـة الـوحيـدة الممكنـة للنهـايـة هي $(d - c)\,(b^2 - a^2)/2$.

تعريـف 16.2:

يقال: بأن الـدالة f قـابلة للتكامـل على الفئـة المحدودة S بشرط أن R مستـطيل (مغلق)

يحتوي على S والدالة f_s هي الدالة المعطاة:

$$f_s(D) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & \text{if } \mathbf{p} \in S, \\ 0, & \text{if } \mathbf{p} \in R \sim S, \end{cases}$$

وتكون f_s قابلة للتكامل على R. في هذه الحالة فإن:

$$\iint_S f = \iint_R f_s .$$

تجدر الملاحظة أن التعريف السابق يعتمد على فكرة مساحة المستطيل R_i. هذا هو العامل المهم «Weighting factor» والذي نضربه في قيمة $f(\mathbf{p}^{(i)})$ في المجموع التقريبي. المساحة $A(R_i)$ هي حجم الفئة الجزئية R_i الذي أشرنا إليه سابقاً. وليس هناك من صعوبة في ذلك لأننا نستطيع وبسهولة الاتفاق على تعريف المساحة $A(R_i)$، والتي هي حاصل ضرب طوله في عرضه.

علاوة على ذلك، فليس من السهل تعريف مساحة الأشكال الأخرى على غرار المستطيلات، وبالطبع نستطيع تعريف مساحة المثلث القائم الزاوية وذلك بتقسيم المستطيل بواسطة أحد أقطاره، وبما أن أي شكل متعدد الأضلاع يمكن تقسيمه إلى مثلثات قائمة الزاوية غير متداخلة فيما بينها، فإن هذا يقودنا إلى فكرة المساحة للأشكال متعددة الأضلاع. ولكن هدفنا أسمى من ذلك. بالفعل فإننا لا نستطيع أن نعتبر تعريفنا كاملاً لأنه لا يعطي تعريفاً لمساحة الدائرة. وهذا يقودنا طبيعياً إلى ضرورة تعريف المساحة على أنها نهاية مجاميع تقريبية، والذي استعمل في تعريف التكامل أعلاه. ولكن لا بد أن ننظر أولاً إلى الغموض الظاهر في التعريف 16.2.

نظرية مساعدة 16.1:

إذا كان R, R^* مستطيلين بحيث يحتوي كل منهما على الفئة S والدالة f معرّفة على S، فإن f_s قابلة للتكامل على R إذا وفقط إذا كانت f_s قابلة للتكامل على R^*، علاوة على ذلك فإن:

$$\iint_R f_s = \iint_{R^*} f_s$$

لقد تُرِكَ برهان هذه النظرية المساعدة كتمرين 16.2.1 . تسمح لنا هـذه النتيجة بـاستنتاج أن $\iint_R f$ وكذلك $\iint_S f$ لا يعتمد على اختيـار المستطيـل R الذي يحتـوي على الفئـة S. هذا يزيل بعض الغموض في تعريف $\iint_S f$ ويسمح لنا بتعريف المسـاحة بـدلالة مثـل هذا التكامل.

16.2 المساحة الداخلية والمساحة الخارجية
Inner and Outer Area

تعريف 16.3 :

تكـون الفئة المحـدودة S ذات مساحـة بشرط أن تكـون الـدالـة c والتي تسـاوي 1 قـابلة للتكامل على S. في هذه الحالة فإن:

$$A(S) = \iint_S c = \iint_R c_s \quad \text{حيث} \quad S \subset R.$$

إن الحقيقة التي وضعت بحذر في التعريف وهي: إن الفئة المحدودة S ذات مساحة توحي باحتمال أن بعض الفئات المحدودة ليست ذات مساحة. يستثنى من هذا الاحتمال الفئة ذات المساحة الصفرية؛ لأن المساحة الصفرية هي قيمـة نهاية كـاملة للمجاميـع غير السـالبة والتي يمكن أن تقرب التكامل $\iint_R c_s$. في مثل هذه الحالة فإن الفئـة لها مسـاحة ولكن مسـاحتها تساوي صفراً. والحالة التي نتعامل معها هي التي تتعلق بالاحتمال حيث المجاميع المقربة:

$$\sum_{i=1}^{n} c_s\,(\mathbf{p}^{(i)})\,A(R_i)$$

لا تقترب إلى نهاية كلما اقترب $\|N\|$ من الصفر. هذا الاحتمال غير متوقع في دراسة التكامل الريماني في الفضاء ذي البعد الواحد، آنذاك تكون الدالة الثـابتة مثـل c دائماً قـابلة للتكامـل على أي فترة. إذا أردنا التكامل على فئات اختياريـة محدودة بـدلاً من الفترات فـإننا سنقـابل مشكلة وهي: هـل نستطيـع تعريف فكـرة الحجم (size) أو القياس (measure) لفئـة كيفية محدودة تطابق تعريف مساحة الفئة في الحالات الخاصة البسيطة مثـل المستطيـلات والأشكال كثـيرة الأضلاع الأخـرى؟ هذه الفكـرة تقود إلى نشـوء قيـاس ليبيـج (Lebesgue measure) والذي يدرسه الطالب بالتفصيل في الـدراسات العليـا لمادة التحليـل الحقيقي. لكن حتى في

نظرية قياس ليبيج فإنه من غير الممكن توسيع فكرة المساحة من فئات بسيطة لتحوي كل الفئات المحدودة. في الوقت الحاضر نكتفي بتوسيع أكثر بساطة لفكرة المساحة والذي نسميه في بعض الأحيان محتوى جوردان (jordan content) للفئة. هذه هي فكرة المساحة التي عرفت مسبقاً.

لندرس فكرة المساحة هذه بتفصيل أكثر. إذا كانت S فئة محدودة وكان R مستطيلاً يحتوي على S، فإن c_s تسمى الدالة المميزة characteristic function للفئة S. لنفرض أن $\mathcal{N}$ شبكة على R ولنعتبر المجموع:

$$\sum_{i=1}^{n} c_s(\mathbf{p}^{(i)})\, A(R_i)$$

عندما تكون $\mathbf{p}^{(i)}$ في R_i.

هذا مجموع تقريبي للتكامل $\iint_S c$ ، والذي عرّفناه ليكوّن مساحة S. وتكون قيمة الحد ذي الترتيب i وهو $\left[c_s(\mathbf{p}^{(i)})\, A(R_i)\right]$ معطاة بأحد الاحتمالات التالية:

(i) إذا كان $R_i \subset S$ ، فإن $c_s = (\mathbf{p}^{(i)}) = 1$، وبالتالي فإن الحد ذي الترتيب i يساوي $A(R_i)$.

(ii) إذا كان $R_i \subset (\sim S)$ فإنّ $c_s(\mathbf{p}^{(i)}) = 0$ فإن الحد ذي الترتيب، i يساوي 0.

(iii) إذا كان $R_i \cap S \neq \emptyset$ و $R_i \cap (\sim S) \neq \emptyset$ فإن الحد ذي الترتيب i إما أن يكون $A(R_i)$ أو 0 وذلك اعتماداً على $\mathbf{p}^{(i)}$ في S أو $\sim S$.

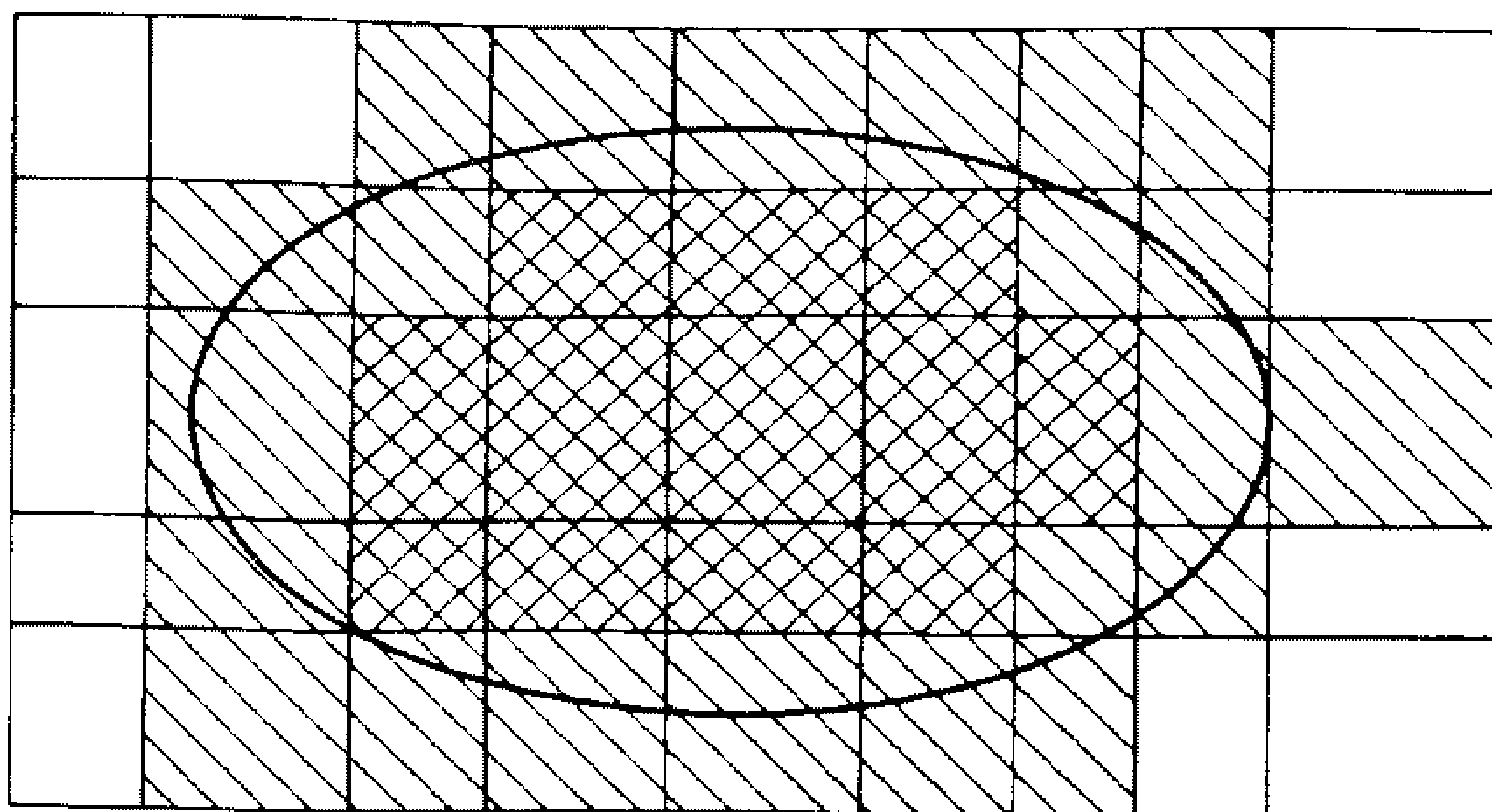
هذا موضح في الشكل 16.2.

نعرف المجموع العلوي والسفلي المقابلين للشبكة $\mathcal{N}$:

المجموع السفلي هو: $a^{-}(\mathcal{N}) = \sum_{R_i \subset S} A(R_i)$ lower sum

المجموع العلوي هو: $a^{+}(\mathcal{N}) = \sum_{R_i \cap S \neq \emptyset} A(R_i)$ uper sum

تقابل الحدود في المجموع السفلي $a^{-}(\mathcal{N})$ المستطيلات من نوع (i)، بينما الحدود في المجموع العلوي $a^{+}(\mathcal{N})$ فهي تقابل المستطيلات من النوعين (i) و (iii). من الواضح أنه



شكل (16.2)

لأي اختيار للنقط $\{p^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ بحيث يكون $p^{(i)}$ في R_i نجد أن:

$$a^-(\mathcal{N}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_s(p^{(i)}) A(R_i) \leqslant a^+(\mathcal{N}). \qquad (1)$$

نظرية مساعدة 16.2:

إذا كانت S فئة جزئية من المستطيل R، وكانت $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ أي شبكتين على R، فإن $a^-(\mathcal{N}) \leqslant a^+(\mathcal{N}')$.

البرهان:

كما في برهان النتيجة المشابهة في حالة E^1، نلاحظ أن $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ لهما تدقيق refinement مشترك $\mathcal{N}^*$ (على سبيل المثال فإن $\mathcal{N}^* = \mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$ تدقيق مشترك)، ولأي تدقيق $a^-(\mathcal{N}) \leqslant a^-(\mathcal{N}')$ و $a^+(\mathcal{N}^*) \leqslant a^+(\mathcal{N})$ فإننا نحصل على الاستنتاج مباشرة من (1).

تعريف 16.4:

المساحة الداخلية (Inner area) لفئة محدودة S هي:

$$A^-(S) = \text{lub}\{a^-(\mathcal{N})\};$$

حيث $\mathcal{N}$ شبكة على R و $S \subset R$.

والمساحة الخارجية (outer area) لفئة محدودة S هي:

$$A^+(S) = \text{glb}\left\{a^+(\mathcal{N})\right\}:$$

حيث $\mathcal{N}$ شبكة على R و $S \subset R$.

باستخدام النظرية المساعدة 16.2 نستنتج مباشرة أنه لأي فئة محدودة S

$$A^-(S) \leq A^+(S).$$

نظرية 16.1:

إذا كانت S فئة محدودة، فإن:

$$\lim_{\|\mathcal{N}\|\to 0} a^+(\mathcal{N}) = A^+(S) \quad \text{و} \quad \lim_{\|\mathcal{N}\|\to 0} a^-(\mathcal{N}) = A^-(S).$$

البرهان:

لنفرض أن $\varepsilon > 0$. باستخدام تعريف المساحة الداخلية $A^-(S)$ توجد شبكة $\mathcal{N}^*$ بحيث إن:

$$a(\mathcal{N}^*) > A^-(S) - \frac{\varepsilon}{2}$$

نختار δ حيث أنه إذا كانت $\mathcal{N}$ شبكة بالخاصية $\|\mathcal{N}\| < \delta$ ، عندئذ تكون المساحة الكلية للمستطيلات المحددة بواسطة $\mathcal{N}$ والتي تقطع خطوط $\mathcal{N}^*$ أقل من $\frac{\varepsilon}{2}$. إذن فإن:

$$a^-(\mathcal{N}) > a^-(\mathcal{N}^*) - \sum_{R_i \cap \mathcal{N}^* \neq \varnothing} A(R_i > a^-(\mathcal{N}^*) - \frac{\varepsilon}{2} > A^-(S) - \varepsilon.$$

لهذا السبب فإن $\lim_{\|N\|\to 0} a^-(\mathcal{N}) = A^-(S)$. وتبرهن النهاية الأخرى بطريقة مشابهة للطريقة السابقة. (انظر التمرين 16.2.2).

نظرية 16.2:

تكون الفئة المحددة S ذات مساحة إذا وفقط إذا كان $A^-(S) = = A^+(S)$.

البرهان:

إذا كان $A^-(S) = A^+(S)$ ، فإن النهايتين في النظرية 16.1 متساويتان. باستخدام هذه

النتيجة والمتباينة (1)، نرى أنّه لا بد للمجاميع المقربة.

$$\sum_{i=1}^{n} c_s (\mathbf{p}^{(i)}) A(R_i)$$

ان تتقارب إلى القيمة المشتركة لكل من $A^-(S)$ و $A^+(S)$. وبالعكس، إذا كان $A^-(S) \neq A^+(S)$ ، فإن المجاميع المقربة لا تتقارب، وبذلك تكون c غير قابلة للتكامل على S. إذن فإن S ليست ذات مساحة.

مثال 16.2:

لنفرض أن ϕ ، φ دالتان عدديتان قابلتان للتكامل الريماني على الفترة $[a, b]$ عندما يكون $\phi(t) \leqslant \varphi(t)$ ، لندرس فئة النقط S والمعطاة

$$S = \left\{\mathbf{x} \in E^2 : a \leqslant x_1 \leqslant b \quad \text{و} \quad \phi(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi(x_1)\right\}. \tag{2}$$

إذن S ذات مساحة؛ لأن المجموعين $a^-(\mathcal{N})$ ، $a^+(\mathcal{N})$ اللذين يقربان المساحة الداخلية والمساحة الخارجية على التوالي، هما أيضاً اللذان يقربان التكامل الريماني السفلي والتكامل الريماني العلوي على التوالي للدالة $\phi - \varphi$.

بما أن هذا الفرق هو دالة قابلة للتكامل فإن التكامل السفلي يساوي التكامل العلْوي ومنها نستنتج أن المساحة الداخلية تساوي المساحة الخارجية للفئة S.

هناك أشكال كثيرة مألوفة في المستوى الاقليدي يمكن وصفها كما وصفنا الفئة S في المثال السابق بحدود تكون منحنيات متصلة (وبالتالي تكون قابلة للتكامل). بهذه الطريقة يمكن استخدام أمثلة سابقة لنبيّن أن فئات مألوفة تكون ذات مساحة. إحدى هذه الفئات هي القرص disk وندرسه في المثال التالي.

مثال 16.3:

لأي نقطة $\mathbf{p}$ في E^2 وأي عدد موجب r تكون الكرة المغلقة $\overline{\mathbf{N}}_r(\mathbf{p})$ ذات مساحة πr^2 . ولحساب ذلك نستطيع أن نأخذ:

$$\phi(x_1) = -\sqrt{r^2 - (x_1 - p_1)^2}$$

و

$$\varphi(x_1) = \sqrt{r^2 - (x_1 - p_1)^2},$$

وتكون الكرة $\overline{\mathbf{N}_r(\mathbf{p})}$ هي الفئة S في المعادلة (2).

من ملاحظتنا للجمع التقريبي في المثال 16.2، نرى أن:

$$A(\mathbf{N}_r(\mathbf{p})) = \int_{p_1-r}^{p_1+r} (\varphi - \phi)$$

$$= 2\int_{p_1-r}^{p_1+r} \sqrt{r^2 - (x_1 - p_1)^2} \quad dx_1 \quad = \pi r^2.$$

على الرغم من ذكرنا واستشهادنا بأمثلة، فلا بد أن نعطي مثالاً لتوضيح الحذر الذي ذكرناه في تعريف المساحة، أي أننا يجب أن نعطي مثالاً لفئة ليست ذات مساحة. باستخدام الخبرة السابقة، ليس من الضروري أن تكون ذكياً لتتنبأ بأن هذه الفئة يمكن أن توصف باستخدام الفئة $\mathbb{Q}^2$ والتي تتكون من النقط **q** ذات الاحداثيات القياسية.

مثال 16.4:

لنفرض أن $S = \mathbb{Q}^2 \cap \{\mathbf{x} : 0 \leqslant x_1 \leqslant 1\}$. نستطيع استخدام المستطيل $[0, 1] \times [0, 1]$ كفئة R لتحديد وجود $\iint_R c_s$. تعرف أن $\mathbb{Q}^2$، $\sim \mathbb{Q}^2$ كلاهما كثيفة في E^2، ولهذا السبب فإنه لأي مستطيل R_i يمكننا اختيار النقطة $\mathbf{p}^i$ في $\mathbb{Q}^2$ أو في $\sim \mathbb{Q}^2$.

إذن فمهما كان معيار الشبكة $\mathcal{N}$ صغيراً فكل R_i تتقاطع مع S، ومن ذلك فإن:

$$a^+(\mathcal{N}) = \sum_{R_i \cap S \neq \emptyset} A(R_i) = A(R) = 1.$$

ولكن $\sim S$ مكثفة (كثيفة) يؤدي إلى أنه لا يوجد $\sim R$ محتواة بالكامل في S وبذلك نستنتج أن $a^-(\mathcal{N}) = 0$.

إذن فإن $A^+(S) = 1$ ، $A^-(S) = 0$ ، أي أن S ليس ذا مساحة.

يتكون الحد $b[S]$ للفئة S من النقط **p** بحيث يكون أي جوار للنقطة **p** متقاطعاً مع كل من S و $\sim S$. تلاحظ أيضاً أن أي شبكة $\mathcal{N}$ على المستطيل R ومحتوية على S فإن الفرق $a^+(\mathcal{N}) - a^-(\mathcal{N})$ هو المساحة الكلية للمستطيلات الجزئية من نوع (iii) والتي تتقاطع مع كل من S و $\sim S$. وهذا يوحي بأن ظهور التساوي بين $A^-(S)$ و $A^+(S)$ يحصل عندما تكون مساحة $b[S]$ صفراً، وهذا هو تأكيد النظرية التالية. وفي البداية نتطرق إلى نتيجة أولية نافعة.

نظرية مساعدة 16.3 :

تكون الفئة المحدودة B مساحة إذا وفقط وإذا كان $A^{+}(B) = 0$.

البرهان :

نعرف أن $0 \leqslant A^{-}(B) \leqslant A^{+}(B)$ ، بحيث إذا كانت $A^{+}(B) = 0$ فإنه من الواضح أن $A^{-}(B) = A^{+}(B)$. والعكس صحيح من تعريف المساحة مباشرة.

نظرية 16.3 :

تكون الفئة المحدودة S مساحة إذا وفقط وإذا كان $b[S]$ ذات مساحة صفرية.

البرهان :

أولاً نفترض أن لِـ S مساحة صفرية. ونفترض أنّ R مستطيلاً بحيث $\overline{S} \subset R^{\circ}$. بما أنّ $A^{-}(S) = A^{+}(S)$ يمكننا اختيار شبكة $\mathcal{N}$ حيث $a^{+}(\mathcal{N}) = a^{-}(\mathcal{N}) < \varepsilon$ حيث ε عدد اختياري صغير موجب لأن $A^{-}(S) = A^{+}(S)$. نفترض $\{R_i^*\}$ تجمعاً من المستطيلات الجزئية التي تتقاطع مع كل من S و S ~ ، إذن $\sum A(R_i^*) = a^{+}(\mathcal{N}) - a^{-}(\mathcal{N}) < \varepsilon$. نريد أن نبيّن أن كل نقطة حدية تقع في بعض R_i ، وبذلك يكون $b[S] \subset \cup R_i^*$ ، والذي يعني أن $A^{+}(b[S]) < \varepsilon$ وبالتالي تكون $A(b[S]) = 0$. لندرس نقطة p في $b[S]$: أولاً إذا كانت p في R_i^* فإن R_i يجب أن يكوّن احدى المستطيلات R_i^* (لأن R_i مجاور للنقطة p).

ثانياً إذا كانت p على الحد المشترك لاثنين أو أكثر من المستطيلات R_i فإنه من الضروري لإحدى هذه المستطيلات R_i أن تحتوي على نقط في كل من S و S ~ وبالتالي يكون احدى المستطيلات R_i^* . في كلا الحالتين تكون p في $\cup R_i^*$. إذن ينتج من ذلك أن $A(b[S]) = 0$.

الآن لنفرض أن $A(b[S]) = 0$ وأن $\varepsilon > 0$. نختار شبكة $\mathcal{N}$ بحيث تكون المساحة الكلية لكل المستطيلات الجزئية R_i' والتي تتقاطع مع $b[S]$ أقل من ε. نؤكد أن كل R_i والذي يتقاطع مع كل من S و S ~ يكوّن احدى عناصر الفئة $\{R_i'\}$ ، بحيث إن:

$$a^{+}(\mathcal{N}) - a^{-}(\mathcal{N}) \leqslant \sum A(R_i') < \varepsilon;$$

فإذا كانت **p** في $R_i \cap S$ و **q** في $R_i \cap (\sim S)$ فإن القطعة الواصلة بين **p** و **q** تقع بالكامل في R_i . نُعرف t^* كالآتي:

$$t^* = \text{lub}\left\{t \in [0, 1] : t\mathbf{p} + (1 - t)\mathbf{q} \in S\right\},$$

ولنفرض أن $\mathbf{p}^*$ تدل على النقطة $t^*\mathbf{p} + (1 - t^*)\mathbf{q}$. إذن فإن كل كرة حول $\mathbf{p}^*$ تحوي نقطاً على هذه القطعة، والتي هي من النوعية $t \leqslant t^*$ أو $t \geqslant t^*$. بما أن أحد الأنواع في S والنوع الآخر في $\sim S$ نستنتج أن **p** في b[S] . إذن فإن R_i هو أحد المستطيلات الجزئية لـ R_i' والتي تتقاطع مع b[S] . وضمناً بحيث لكل عدد موجب ε توجد شبكة $\mathcal{N}$ حيث إن $a^+(\mathcal{N}) - a^-(\mathcal{N}) < \varepsilon$ وبالتالي فإن:

$$A^+(S) = \lim_{\|\mathcal{N}\| \to 0} a^+(\mathcal{N}) = \lim_{\|\mathcal{N}\| \to 0} a^-(\mathcal{N}) = A^-(S).$$

تمارين 16.2

1 - برهن النظرية المساعدة 16.1 . (ارشاد: $R \cap R^*$ عبارة عن مستطيل يحتوي على S و $f(\mathbf{p}^{(i)}) = 0$ لأي $\mathbf{p}^{(i)} \notin R \cap R^*$).

2 - برهن التأكيد الثاني في النظرية 16.1 : $\lim_{\|\mathcal{N}\| \to 0} a^+(\mathcal{N}) = A^+(S).$

3 - لنفرض أن R كما في المعادلة (2) ونعرّف الدالة التالية:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1\,, & x_1 = c,\ a < c < b, \\ 0, & \text{ما عدا ذلك}\,, \end{cases}$$ حيث

برهن على أن $\iint_R f = 0$.

4 - لنفرض أن R كما في المعادلة (2) وأن $R' = [b, e] \times [c, d]$ عندما يكون $e > b$. برهن أنه إذا كانت f قابلة للتكامل على R وعلى R' ، فإن f قابلة للتكامل على $R \cup R'$ و

$$\iint_{R \cup R'} f = \iint_R f + \iint_{R'} f.$$

5 ـ إذا أعطيت:

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in E^2 : x_1 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad \text{و} \quad x_2 \in [0, 1] \right\},$$

أوجد $A^-(S)$ و $A^+(S)$.

6 ـ إذا أعطيت:

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in E^2 : x_1 = x_2 \in [0, 1] \right\}$$

أوجد $A^-(S)$ و $A^+(S)$.

7 ـ برهن على أنه إذا كانت S فئة مفتوحة، فإن $A^-(S) > 0$.

8 ـ برهن على أنه إذا كانت S فئة جزئية كثيفة من المستطيل R، فإن $A^+(S) = A(R)$.

9 ـ إذا كانت:

$S = \mathbb{Q}^2 \cap ([0, 1] \times [0, 1])$ كما في المثال 16.4، أوجد $b[S]$.

10 ـ ما هو $b[\varnothing]$؟

هل توجد فئة غير خالية بحيث يكون $b[S] = \varnothing$؟

11 ـ ما هو $b[\mathbb{Q}^2]$؟

12 ـ إذا كان R مستطيلاً وكانت $\mathcal{N}$ شبكة على R، أوجد $b[\mathcal{N}]$.

13 ـ برهن أنه إذا كانت **p** نقطة معزولة (Isolated) من S، فإن $p \in b[S]$.

14 ـ كون مثالاً واشرحه لفئة مفتوحة ليست ذات مساحة.

(ارشاد: اكتب نقط الفئة S التي في المثال 16.4 كمتتالية $\{\mathbf{q}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ ولكل i افترض أن الكرة $\mathbf{N}_{r(i)}(\mathbf{p}^{(i)})$ ذات مساحة 2^{-i-1} ومن ذلك فإن:

$$A^-\Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_{r(i)}(\mathbf{N}^{(i)})\Big] \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1}$$

16.3 خواص التكامل الثنائي

Properties of the Double integral

محتوى هذا البند هو قائمة من خواص التكامل الذي عرفناه على فئة جزئية من E^2 . ويمكن التعرّف على الخواص كما برهنت في حالتي التكامل الريماني وتكامل ريمان ـ استيلتيس على E^2 . وهي تعتبر كحدٍ كبير الخواص الأساسية التي نجدها في النظرية التي تتناول أي نوع من التكامل. هناك القليل من الخواص التي تكون استثناءات وهي متعلقة بالنطاق S الذي يؤخذ عليه التكامل. والسبب الوحيد في أن هذه الخواص لا تشابه مقابلاتها في حالة التكامل على البعد الواحد هو أننا لا ندرس احتمال التكامل على فئات جزئية من E^1 غير الفترات. نظريتنا الأولى تتعلق بهذه الخواص القليلة الاستثنائية؛ ولهذا السبب سنقدم لها برهاناً كاملاً. في أغلب الحالات تترك البراهين كتمرينات؛ لأنها تشابه مقابلاتها في حالة التكامل الريماني.

نظرية 16.4 :

نعتبر f دالة محدودة على فئة محدودة S، ونفترض أن Z فئة جزئية من S بحيث يكون $A(Z) = 0$ و $f(\mathbf{x}) = 0$ طالما كانت $\mathbf{x}$ في $Z \sim S$. عندئذٍ f قابلة للتكامل على S و

$$\iint_S f = 0$$

البرهان:

لنفرض أن $|f(\mathbf{x})| < k$ على S وأن $\varepsilon > 0$. نعتبر R مستطيلاً يحتوي على S ونختار شبكة $\mathcal{N}$ بحيث تكون المساحة الكلية للمستطيل R_i^* والتي تتقاطع مع Z أقل من $\frac{\varepsilon}{k}$ ، إن أي $\mathbf{p}^{(i)}$ في R_i والذي يختلف عن R_i^* تعطي $f(\mathbf{p}^{(i)}) = 0$. لهذا السبب فإنه مهما كانت طريقة اختيار $\mathbf{p}^{(i)}$ ، يكون لدينا:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_s(\mathbf{p}^{(i)})\, A(R_i)\right| = \left|\sum f_s(\mathbf{p}^{(i)*})\, A(R_i^*)\right| \leqslant \sum \left|f_s(\mathbf{p}^{(i)*})\right| A(R_i^*)$$

$$\leqslant k \sum A(R_i^*) < \varepsilon .$$

إذن فإن $\lim\limits_{\|\mathcal{N}\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_s(\mathbf{p}^{(i)})\, A(R_i) = 0$ ، أي أن $\iint_S f = 0$.

نظرية 16.5 :

إذا كانت كل من f, g قابلة للتكامل على الفئة المحدودة S، فإن $f + g$ و $f - g$ قابلة للتكامل على S و

$$\iint_S (f \pm g) = \iint_S f \pm \iint_S g.$$

البرهان :

ترك كتمرين 16.3.1 .

نتيجة 16.5 :

لنفرض أن f, g دالتان محدودتان على الفئة المحدودة S وتوجد فئة جزئية Z من S حيث $f(x) = g(x)$ طالما x في S، عندئذٍ تكون f قابلة للتكامل على S إذا وفقط وإذا كانت g قابلة للتكامل على S و

$$\iint_S f = \iint_S g.$$

البرهان :

باستخدام النظرية 16.4 فإنّ دالة الفرق $f - g$ قابلة للتكامل على S و $\iint_S (f - g) = 0$. إذن فإنّ قابلية التكامل لإحدى الدالتين تؤدي إلى قابلية التكامل للأخرى (وذلك باستخدام النظرية 16.5). وينتج تساوي قيمتهما من الصيغة الموجودة في النظرية 16.5 .

نظرية 16.6 :

إذا كانت كل من g، f قابلة للتكامل على S وكان $f(x) \leqslant g(x)$ طالما x في S، فإن:

$$\iint_S f \leqslant \iint_S g.$$

البرهان :

ترك كتمرين 16.3.2 .

نظرية 16.7:

إذا كانت f قابلة للتكامل على S وكان k عدداً، فإن kf قابلة للتكامل على S و

$$\iint_S kf = k \iint_S f.$$

البرهان:

ترك كتمرين 16.3.3.

نتيجة 16.7:

إذا كانت S فئة ذات مساحة وكانت f دالة ثابتة، ولنَقُلْ: إنّ $f(x) = k$ ، فإن f قابلة للتكامل على S و

$$\iint_S k = kA(S).$$

البرهان:

ترك كتمرين 16.3.4.

نظرية 16.8:

لنفرض أن f قابلة للتكامل على كل من الفئتين S و T، عندما تكون $A(S \cap T) = 0$ ، فإن f قابلة للتكامل على $S \cup T$ و

$$\iint_{S \cup T} f = \iint_S f + \iint_T f.$$

البرهان:

إذا كان R مستطيلاً يحتوي على $S \cup T$ ، فإن كلاً من f_s و f_T قابلة للتكامل على R. وباستخدام النظرية 16.5 نجد أن:

$$\iint_R (f_s + f_T) = \iint_R f_s + \iint_R f_T.$$

إذا كان x في $R \sim (S \cap T)$ ، فإن $f_{S \cup T}(x) = f_S(x) + f_T(x)$. وحيث إن

$A(S \cap T) = 0$ ، فنستطيع من النتيجة استنتاج أن $f_{S \cup T}$ قابلة للتكامل على R أيضاً و:

$$\iint_R f_{S \cup T} = \iint_R (f_S + f_T)$$

لهذا السبب فإن f قابلة للتكامل على $S \cup T$ وتكاملها هو:

$$\iint_{S \cup T} f = \iint_R f_{S \cup T} = \iint_R f_S + \iint_R f_T = \iint_R f + \iint_T f.$$

تمارين 16.3

1 ـ برهن النظرية 16.5.

2 ـ برهن النظرية 16.6.

3 ـ برهن النظرية 16.7.

4 ـ برهن النتيجة 16.7.

5 ـ برهن أنه إذا كانت f قابلة للتكامل على R، فإنها محدودة هناك.

6 ـ تكون الدالة السُلَّمية S على مستطيل R دالة محدودة وتوجد لها شبكة $\mathcal{N}$ على R بحيث إن S تكون ثابتة القيمة داخل R_i° لكل مستطيل جزئي تحدده الشبكة. برهن أن مثل هذه الدالة السُلَّمية قابلة للتكامل على R وإذا كان $s(x) = k_i$ على R_i° ، فإن:

$$\iint_R s = \sum_{i=1}^{n} k_i \, A(R_i).$$

16.4 التكاملات الخطيّة (المُنْحَنية) Line Integrals

ندرس في هذا البند نوعاً آخر من التكامل الأحادي الذي له علاقة بالتكاملات الثنائية التي درست. وهذه العلاقة بالتكامل الثنائي ذات وجهين: يفترض هذا التكامل الاحادي وجود دوال ذات نطاق في E^2 ، وكما نرى في البند 16.7 فإنّ استخدامه ممكن لحساب نوع

معين من التكاملات الثنائية. أولاً نصف الفئات في E^2 والتي تُشكل نطاق الـدوال المتكاملة (Integrand).

تعريف 16.5:

تسمى الفئة C منحني (curve) في E^2 إذا وجدت دالتان متصلتان g و h على الفترة [a, b] بحيث تكون:

$$C = \{x \in E^2 : x_1 = g(t), x_2 = h(t), t \in [a, b]\}. \quad (1)$$

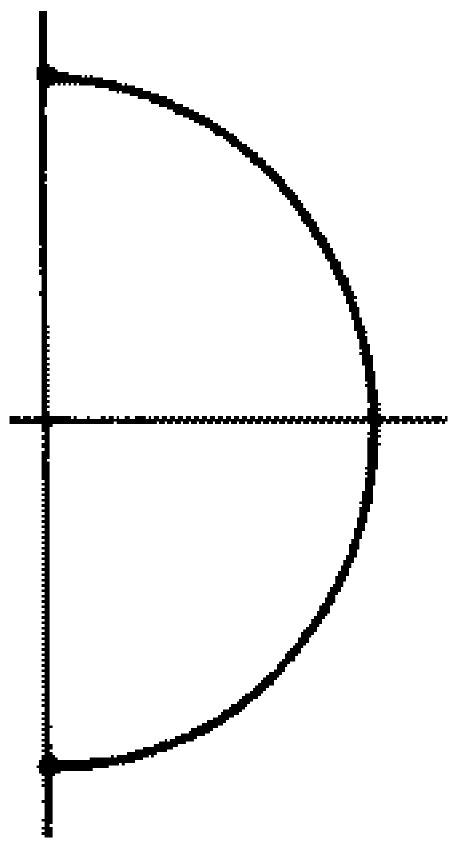
عندما يكون $t = a$ ، فإن النقطة الناتجة $(g(a) \text{ و } h(a))$ تسمى النقطة الابتـدائية (intitial point) للمنحني C وعندما $t = b$ فإن النقطة $(g(b) \text{ و } h(b))$ تسمى النقـطة النهائيـة (ter-minal point) للمنحني C.

يسمى المنحني C بـالمنحني المغلق (closed curve) إذا تطابقت نقـطتا البـدايـة والنهـايـة، ويسمى المنحني C بـالمنحني البسيط (simple curve) إذا كـان $t, t' \in [a, b]$ يـؤدي إلى $(g(t), h(t)) \neq (g(t'), h(t'))$ وهذا يعني أن المنحني لا يتقاطـع مع نفسـه، وإذا تقاطـع مع نفسـه فـلا يكـون إلا عنـد النقـطة النهـائيـة. إذا كـانت g، f لهـا مشتقـات متصلة عـلى [a, b] ، فـإن المنحني C يسمى بـالمنحني الأملس (smooth curve). إذا كـان C هـو اتحاد عدد نهائي من المنحنيات الملساء والتي تكون نقطتها النهائية متصلة بنقطتها الابتدائية، فإن C يسمى.بالمنحنى متقطع الملاسة (sectionally smooth).

مثـال 16.5:

إذا كـان $x_1 = \sin t$ و $x_2 = \cos t$ لكل $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

عندها يكون C المنحنى الأملس البسيط المُبيَّن في الشكل 16.3a.



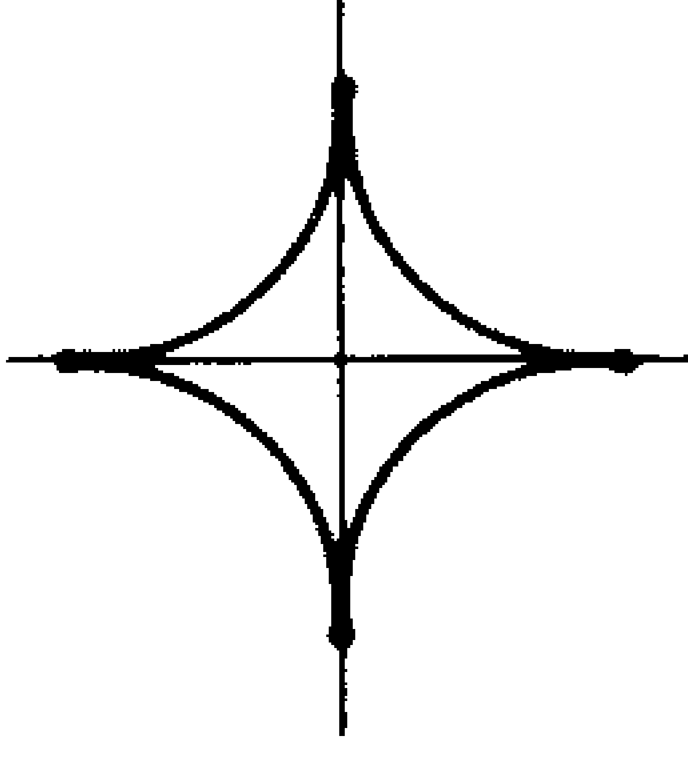
شكل (16.3a)

مثـال 16.6:

إذا كـان $x_1 = \cos^3 t$ و $x_2 = \sin^3 t$ لـكـل $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

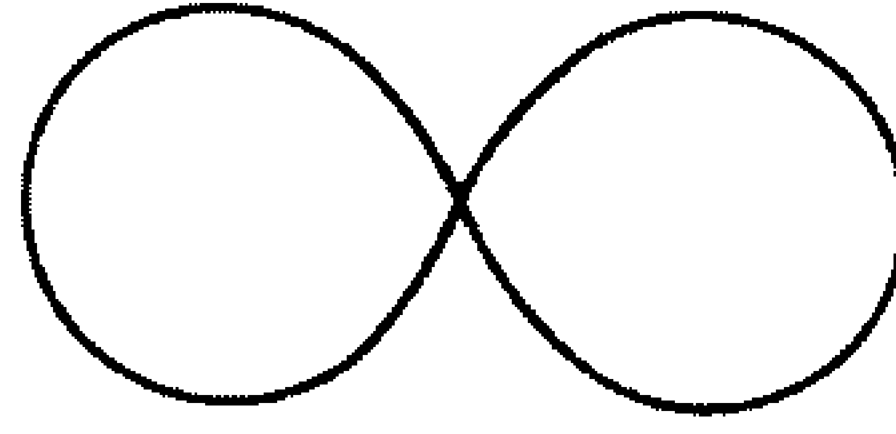
عـنـدهـا C يمثّـل منحني الأوسـترويد أو النجمي (astroid)

كما في الشكل 16.3b وهو منحني مغلق بسيط وكذلك منحني متقطع الملاسة.


شكل ((16.3b)

مثال 16.7 :

المنحني المرسوم في الشكل 16.3c هو منحني مغلق وأملس ولكنه منحني غير بسيط.


شكل (16.3c)

من مبادىء التفاضل والتكامل نتذكر أن المنحني المعطى أعلاه له كثير من الصور البارامترية، ولهذا السبب فإن الدالتين g و h في التعريف 16.5 غير وحيدتين. علاوة على ذلك فإنه يوجد اختلاف في التحويل إلى الصور البارامترية، وهو نافع جداً. فمن الأهمية بمكان أحياناً تبديل نقطتي النهاية والبداية للمنحني وتغيير اتجاه المنحني في الاتجاه المضاد. وينجز ذلك باستبدال الدالتين البارامتريتين $g(t)$ و $h(t)$ بالدالتين التراكبيتين $g(-t + a + b)$ و $h(-t + a + h)$ على التوالي، ونشير إلى ذلك بالرموز $-C$.

تعريف 16.6 :

إذا كانت F دالة نطاقها فئة مفتوحة ومترابطة وتشتمل على المنحني C كما هو معطى في المعادلة (1) وإذا كانت ϕ دالة على $[a, b]$ ، فإن الدالة التراكبية $F(g(t), h(t))$ دالة على $[a, b]$ أيضاً، ونستطيع الحصول على تكامل ريمان استيلتيس $\int_a^b F(g, h)\, d\phi$. يسمى هذا التكامل بالتكامل المنحني أو الخطي ويرمز له بالرمز $\int F\, d\phi$. إذن:

$$\int_C F\, d\phi = \lim_{||\pi|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(g(\mu M_k, h(\mu_k)) [\phi(t_k) - \phi(t_{k-1}]. \qquad (2)$$

عندما تكون ϕ ذات مشتقة متصلة فإن التكامل (2) يختصر إلى التكامل الريماني $\int_a^b F\phi'$ كما رأينا في الفصل العاشر. من الملاحظ أن التكامل (2) يعتمد كلياً على

التمثيل البارامتري لـ C. على سبيل المثال فإذا كان C منحني بسيطاً مغلقاً وكـان هناك اثنـان من التمثيلات البارامترية للمنحني C بحيث إن أحـدهما يمـر خلال C مـرة واحدة والآخـر يمر خلال C مرتين على التوالي، فإن التمثيـل الثاني يعـطي تكامـلاً ذا قيمة تسـاوي ضعف قيمة التكامل في حالة التمثيل الأول.

لتبسيط الرموز في هذا الفصل فإن الحروف g و h تمثل الدوال البـارامترية كما في المعـادلة (1)، أي أن $g(t)$ تـأخـذ مكـان الإحـداثي السيني x_1 و $h(t)$ تـأخـذ مكـان الإحـداثي الصادي x_2 للنقطة x على C.

في أغلب الأحيـان يتكـرر تكـامـل منحني معـين وينتـج هـذا التكـامـل من استخـدام احدى الدوال البارامترية g أو h بدلاً من ϕ ليعطي التكامل الخطي:

$$\int_C P\,fg \quad \text{و} \quad \int_C Q\,dh. \tag{3}$$

وبالجمع نحصل على نوع ثالث هو:

$$\int_C \left[P\,dg + Q\,dh\right]. \tag{4}$$

تماريـن 16.4

في التـمارين من 1 الى 5 ارسم المنحني C وحدّد مـا إذا كان المنحني C بسيـطاً أو مغلقاً أو أملس.

1 - $h(t) = \sin \pi t$ و $g(t) = 2\cos \pi t$ حيث $0 \leqslant t \leqslant 2$.

2 - $h(t) = t^2$ و $g(t) = t^3$ حيث $0 \leqslant t \leqslant 1$.

3 -

$$g(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & 0 \leqslant t < 1, \\ 2t - 3, & 1 \leqslant t \leqslant 2; \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & 0 \leqslant t < 1, \\ 0\ , & 1 \leqslant t \leqslant 2; \end{cases}$$

حيث $0 \leqslant t \leqslant 2$.

4 ـ

$$g(t) = \begin{cases} t \quad , & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ 4\pi - t, & 2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi; \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \\ 0 \quad , & 2\pi \leqslant t > R\pi; \end{cases}$$

حيث $0 \leqslant t \leqslant 4$.

5 ـ

$$g(t) = \begin{cases} 1 \quad , & 0 \leqslant t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t \quad , & 0 \leqslant t < 1, \\ 1 \quad , & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

حيث $0 \leqslant t \leqslant 2$.

6 ـ احسب $\int_C f\, d\phi$ عندما تكون $f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2 + 3x_2$ و $\phi(t) = t^2$ و $C = \{(t, t^2) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

7 ـ احسب $\int_C f\, d\phi$ عندما تكون $f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2 + 3x_2$ و $\phi(t) = t$ وكذلك $C = \{(\cos t, \sin t) : 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\}$.

8 ـ احسب التكامل $\int_C f\, d\phi$ حيث $f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2 + 3x_2$ و $\phi(t) = t$ و C كما هو معطى في التمرين 5.

9 ـ احسب $\int_C P\, dg$ حيث $P(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2$ و C منحني معطى في التمرين 1.

10 ـ احسب $\int_C (P\, dg + Q\, dh)$ عندما تكون $P(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2$ و $Q(\mathbf{x}) = 2x_2$ و C منحني معطى في التمرين 2.

11 ـ احسب $\int_C (P\, dg + Q\, dh)$ حيث $P(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ و $Q(\mathbf{x}) = 2x_2$ و C منحني معطى في التمرين 4.

12 ـ إذا كان C هو المنحني المعطي في (1) و p^* نقطة أخرى على C مختلفة عن النقطة الابتدائية p والنقطة النهائية q، بَيِّن أنه يمكن كتابة $C = C_1 \cup C_2$ حيث C_1 منحني من p إلى p^* و C_2 منحني من p^* إلى q.

16.5 عدم الاعتماد على المسار والتفاضل التام

Independence of Path and Exact Differentials

في هذا البند نعرف فكرتين على علاقة بالتكامل المنحني (الخطي) ونبرهن هذه العلاقة. وخلال هذا البند نُعرِّف D كفئة مفتوحة. ومحدودة في E^2.

تعريف 16.7:

إذا كانت F دالة على D، فإن التكامل الخطي $\int_C F\,d\phi$ لا معتمد على المسار (path) في D بشرط إذا كانت p وكذلك q أي نقطتين في D، و C_1 و C_2 أي منحنيين بحيث تكون لهما النقطتان الابتدائية والنهائية p و q، على التوالي، فإن التكاملين التاليين لهما القيمة نفسها وهي:

$$\int_{C_1} F\,d\phi = \int_{C_2} F\,d\phi.$$

وتعتبر هذه النتيجة حول التكامل الخطي ميزة بديهية لعدم الاعتماد على المسار.

نظرية 16.9:

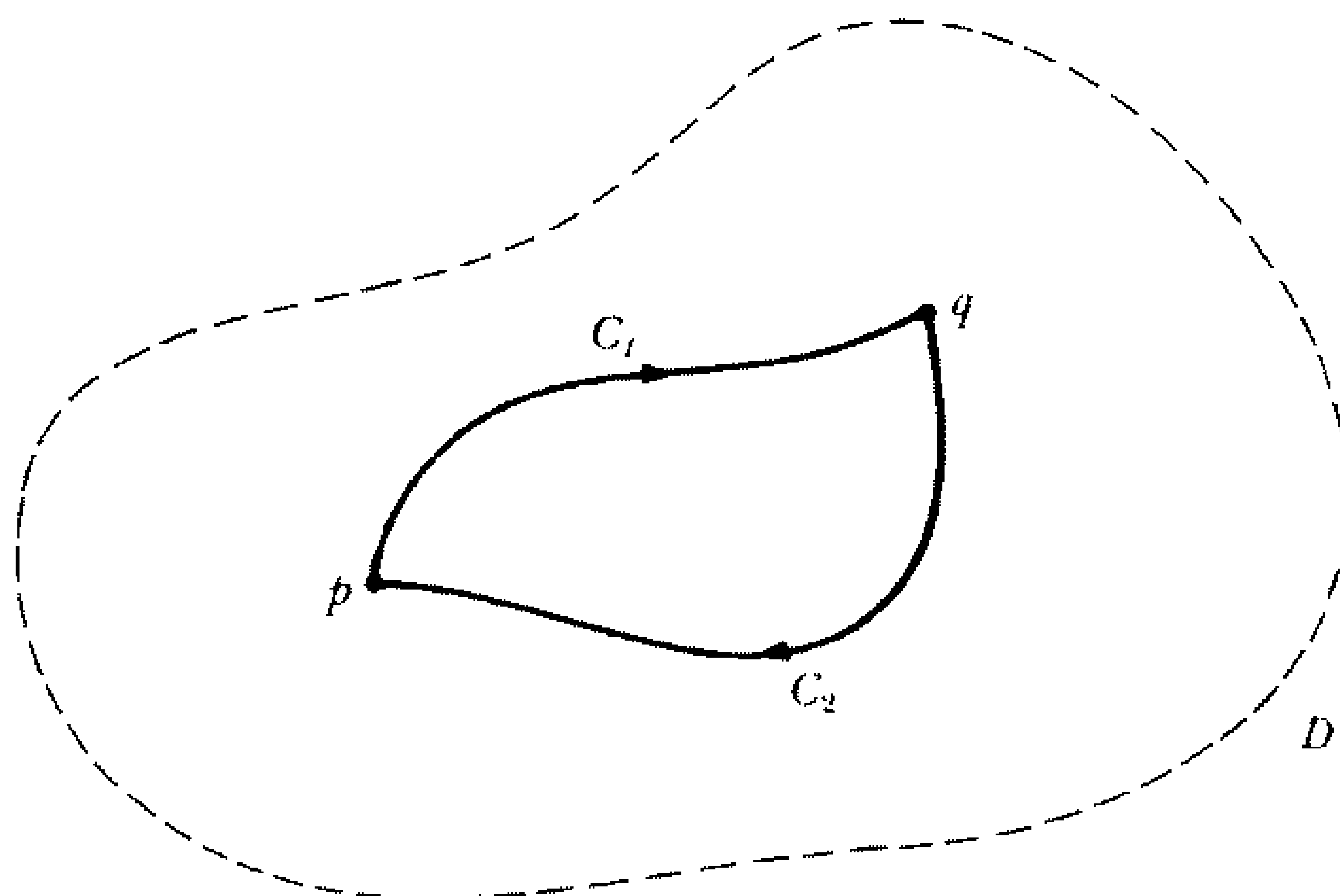
لا يعتمد التكامل الخطي $\int_C F\,d\phi$ على المسار في D إذا وفقط وإذا كان لكل منحني متقطع الملاسة ومغلق C في D لدينا:

$$\int_C F\,d\phi = 0 \qquad (1)$$

البرهان:

أولاً نفترض أن p و q نقطتان في D ولنفرض أن (1) صحيح لكل منحني متقطع الملاسة ومغلق في D. إذا كان C_1 و C_2 منحنيين بالشروط السابقة من p إلى q، نعرّف

$C = C_1 \cup (-C_2)$ حيث $-C_2$ هو المنحني C_2 في الاتجاه المضاد (انظر الشكل 16.4).



شكل (16.4)

بالتحديد يعرف المنحني C كما يلي:

$$C_1 = \{(g_1(t), h_1(t)) : a \leqslant t \leqslant b\},$$

و

$$C_2 = \{(g_2(t), h_2(t)) : b \leqslant t \leqslant c\}.$$

ونختار

$$C = \{(g(t), h(t)) : a \leqslant t \leqslant c\}$$

عندما تكون

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) \quad , & a \leqslant t < b, \\ g_2(-t + b + c) \ , & b \leqslant t \leqslant c, \end{cases}$$

و

$$h(t) = \begin{cases} h_1(t) \quad , & a \leqslant t < b, \\ h_2(-t + b + \ ) \ , & b \leqslant t \leqslant c, \end{cases}$$

إذن فإن C منحني متقطع الملاسة ومغلق، ومن (1) يكون:

$$\int_{C_2 \cup (-C_2)} F \, d\phi = 0.$$

من خواص تكامل ريمان ـ استيلتيس (نظرية 10.4 و 10.5) هذه المعادلة تكافىء:

$$\int_{C_1} F\, d\phi - \int_{C_2} F\, d\phi = 0.$$

وعلى العكس لنفرض أن $\int F\, d\phi$ مستقلٌ عن المسار في D ولا يعتمد عليه. إذا كان C أي منحني متقطع الملاسة ومغلق في D. كما هو مبين في الشكل 16.4 نختار نقطتين p و q على C ونقسّم C إلى C_1 (من p إلى q) و C_2 (من q إلى p). (انظر التمرين 6.4.12).

إذن يعطينا عدم الاعتماد على المسار:

$$\int_{C_1} F\, d\phi = \int_{-C_2} F\, d\phi,$$

وبذلك فإن:

$$0 = \int_{C_1} F\, d\phi + \int_{C_2} F\, d\phi = \int_{C_1 \cup C_2} F\, d\phi = \int_{C} F\, d\phi.$$

تعريف 16.8:

إذا كانت P و Q دالتين على D فإن التعبير $P\, dg + Q\, dh$ يسمى تفاضلاً تاماً (exact differential) في D بشرط وجود دالة f على D بحيث يكون:

$f_1 = P$ و $f_2 = Q$.

ويصف مصطلح التفاضل التام حقيقة أن المصفوفة ـ الصف (row) $[P\ Q]$ تُعدُّ تفاضلاً لدالة f. الرمز $P\, dg + Q\, dh$ يستعمل بدلاً من الرمز بالمصفوفة وذلك لعلاقته القوية بالتكاملات المنحنية، وبعض هذه العلاقات يوضح في النظرية التالية وهي تناظر النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل.

نظرية 16.10:

إذا كان $P\, dg + Q\, dh$ تفاضلاً تاماً في D و C أي منحني متقطع الملاسة في D من **p** إلى **q**، عندئذٍ توجد دالة f على D بحيث يكون:

$$\int_{C} \left[P\, dg + Q\, dh\right] = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}). \tag{2}$$

البرهان:

أولاً تدرس الحالة عندما يكون C منحني أملس. عندها g و h قابلتان للتفاضل باتصال على [a, b]، ويكون لدينا:

$$\int_C [P\,dg + Q\,dh] = \int_a^b P \cdot g' + \int_a^b Q \cdot h'$$
$$= \int_a^b (f_1 g' + f_2 h').$$

باستخدام قاعدة السلسلة في E^2 (نظرية 15.4). فإن المكامل Integrand في التكامل الأخير هو المشتقة $f'(g, h)$ للدالة التراكيبية $f(g, h)$.

إذن باستخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل، يكون لدينا:

$$\int_C [P\,dg + Q\,dh] = f(g(b), h(b)) - f((a), h(a))$$
$$= f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}).$$

في الحالة حيث يكون C اتحاد عدد نهائي من المنحنيات متقطعة الملاسة، فإن التكامل على C يكون بأخذ التكامل على n من الأجزاء الملساء والتي طبقنا عليها الحالة السابقة. إذن يمكن جمع المعادلات n- الناتجة، وتعطينا الأطراف اليمنى بعد الجمع $f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})$. (هذه التفاصيل مطلوبة في التمرين 16.5.1).

النظرية التالية تعتبر النتيجة الأساسية في هذا البند وهي تعطي العلاقة بين فكرتي عدم الاعتماد على المسار والتفاضل التام.

نظرية 16.11:

إذا كانت P و Q متصلتين في D، فإن $\int_C [P\,dg + Q\,dh]$ مستقل عن المسار في D إذا وفقط وإذا كان $P\,dg + Q\,dh$ تفاضلاً تاماً في D.

البرهان:

احدى التضمينات في هذه النظرية هي نتيجة مباشرة للنظرية 16.10. ونرى ذلك إذا كان

$P\,dg + Q\,dh$ تفاضلاً تاماً، لنقل مثلاً للدالـة f، فإن قيمـة التكامـل المنحني (الخطي):

$\int_C [P\,dg + Q\,dh]$ تكـون $f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})$ والتي من الـواضـح أنها تعتمـد فقط عـلى نقطتي النهاية **p** و **q**. إذن فإن التكامل مستقل عن المسار من **p** إلى **q**.

الآن نفـترض أن $\int_C [P\,dg + Q\,dh]$ مستقل عن المسـار في D. نحتاج دالـة f حيث تحقق $f_1 = P$ و $f_2 = Q$. إذا كانت $\mathbf{p}^*$ نقطة في D والدالة f مُعرَّفة بالمعادلة التالية:

$$f(\mathbf{x}) = \int_C [P\,dg + Q\,dh],$$

حيث C منحنى متقطـع الملاسـة في D من $\mathbf{p}^*$ إلى **x**. (نلاحظ أن الاستقـلالية عن المسـار تضمن أن f معرّفة جيداً). لندرس فرق القسمة.

$$\frac{\left[f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(\mathbf{x})\right]}{\Delta x_1} = \left(\frac{1}{\Delta x_1}\right)\left\{\int_{\mathbf{p}^*}^{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}} [P\,dg + Q\,dh] - \int_{\mathbf{p}^*}^{\mathbf{x}} [P\,dg + Q\,dh]\right\}. \tag{3}$$

بمـا أن التكامـلات في الطرف الأيمن لا تعتمـد على المسـار، وقـد أشرنـا فقط إلى نقـطتي النهاية، فمن الممكن اختيـار المنحنيـات التي تنـاسب غـرضنـا. إذا كـان C_1 منحنى متقـطع المـلاسـة من $\mathbf{p}^*$ إلى **x** ونعـرّف C_2 بحيث يكون المسـار من $\mathbf{p}^*$ إلى $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ والمعـطى بـ $C_2 = C_1 \cup L$ حـيـث L المسـتـقـيـم الـواصـل مـن $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ إلى $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} = (x_1 + \Delta x_1, x_2)$. (من الممكن أن نفـترض أن $L \subseteq D$؛ لأن D مفتـوحـة و $\|\Delta\mathbf{x}\|$ يمكن اختياره صغيراً جداً).

إذن:

$$\int_{C_2} [P\,dg + Q\,dh] = \int_{C_1} [P\,dg + Q\,dh] + \int_L [P\,dg + Q\,dh],$$

وتتحول المعادلة (3) إلى:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{1}{\Delta x_1} \int_L [P\,dg + Q\,dh]. \tag{4}$$

ولكن تمّ اختيار L بحيث يكون الاحداثي الصادي ثابتاً على L. وهذا يؤدي إلى أن $\int_L Q\, dh = 0$ ، وبذلك يمكن اختصار (4) إلى:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{1}{\Delta x_1} \int_L P\, dg. \tag{5}$$

الآن يمكننا حساب التكامل على L وذلك باختيار تمثيلات بارامترية بسيطة خاصة لـ L والتي يمكن أن نذكرها كالآتي: إذا كان $g(t) = t$ على الفترة $[x_1, x_1 + \Delta x_1]$ ، فإن:

$$\int_L P\, dg = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} P(t, x_2)\, dt.$$

بما أن P متصلة فإن نظرية القيمة الوسطى تضمن أنه يوجد عدد μ في $[x_1, x_1 + \Delta x_1]$ بحيث إن:

$$P(\mu, x_2) \cdot \Delta x_1 = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} P.$$

بتعويض ذلك في (5) نحصل على:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = P(\mu, x_2).$$

وعندما تؤول Δx_1 إلى الصفر فإن الطرف الأيسر يقترب من $f_1(\mathbf{x})$. وكذلك μ تقترب من x_1 عندما تؤول Δx_1 إلى الصفر أيضاً، وتؤدي خاصية الاتصال لـ P إلى اقتراب الطرف الأيمن إلى $P(x_1, x_2)$. إذن فإن $f_1(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})$. إنّ برهان $f_2 = Q$ يتمّ بالطريقة نفسها (انظر التمرين 16.5.2).

تمارين 16.5

1 ـ أعط تفاصيل البرهان للنظرية 16.10 في الحالة التي يكون فيها C مساراً متقطع الملاسة.

2 ـ أعط التفاصيل لبرهان النظرية 16.11 في الحالة $f_2 = Q$.

3 ـ وضح أن التعبير $P\,dg + Q\,dh$ تفاضل تام في كل حالة وذلك بايجاد دالة f كما هو في التعريف 16.8.

(a) $P(\mathbf{x}) = 2x_1x_2,\ \ A(\mathbf{x}) = x_1^2;$

(b) $P(\mathbf{x}) = x_2^3,\ \ Q(\mathbf{x}) = 3x_1x_2^2;$

(c) $P(\mathbf{x}) = x_2^2\, e^{x_1x_2},\ \ Q(\mathbf{x}) = (1 + x_1x_2)\, e^{x_1x_2}.$

4 ـ استخدم النظرية 16.1 لحساب التكامل الخطي $\int_C [p\,dg + Q\,dh]$ في كل حالة:

(a) P و Q كما في التمرين (3 a) و $C = \{(t, t^2) : 0 \leqslant t \leqslant 2\}$.

(b) P و Q كما في التمرين (3b) و $C = \{(\cos t, \sin t) : 0 \leqslant t \leqslant \pi\}$.

(c) P و Q كما في التمرين (3 c) و $C = \{(t^2, t^3) : -1 \leqslant t \leqslant 1\}$.

5 ـ برهن أنه إذا كانت P و Q و P_2 وكذلك Q_1 دوال متصلة في D و $P\,dg + Q\,dh$ تفاضلاً تاماً في D، فإن $P_2 = Q_1$ خلال D.

(ارشاد: استخدم النظرية 15.6).

6 ـ وضّح أن التعبير $P\,dg + Q\,dh$ لا يكون تفاضلاً تاماً في E^2 للدالتين P و Q المعطاتين في كل حالة:

(a) $Q(\mathbf{x}) = \cos x_1y_2.$ $P(\mathbf{x}) \sin x_1y_2,$

(b) $Q(\mathbf{x}) = 3x_1x_2^2 - x_2^3.$ $P(\mathbf{x}) = x_1^3 + 3x_1x_2^2,$

(c) $Q(\mathbf{x}) = x_1 \cos x_2.$ $P(\mathbf{x}) = x_1 \sin x_2.$

كنتيجة أخيرة للتكاملات الخطيّة، نبني علاقة بين التكامل الثنائي على فئة S والتكامل الخطي على منحني حدود الفئة S. من الطبيعي أن نعلن أنه ليست كل فئة محدودة في E^2 هي ذات حدود كافية لتكوين منحنى يمكن استخدامه في التكامل الخطي. لهذا السبب من الضروري وصف الفئات التي يمكننا استخدامها ودراستها.

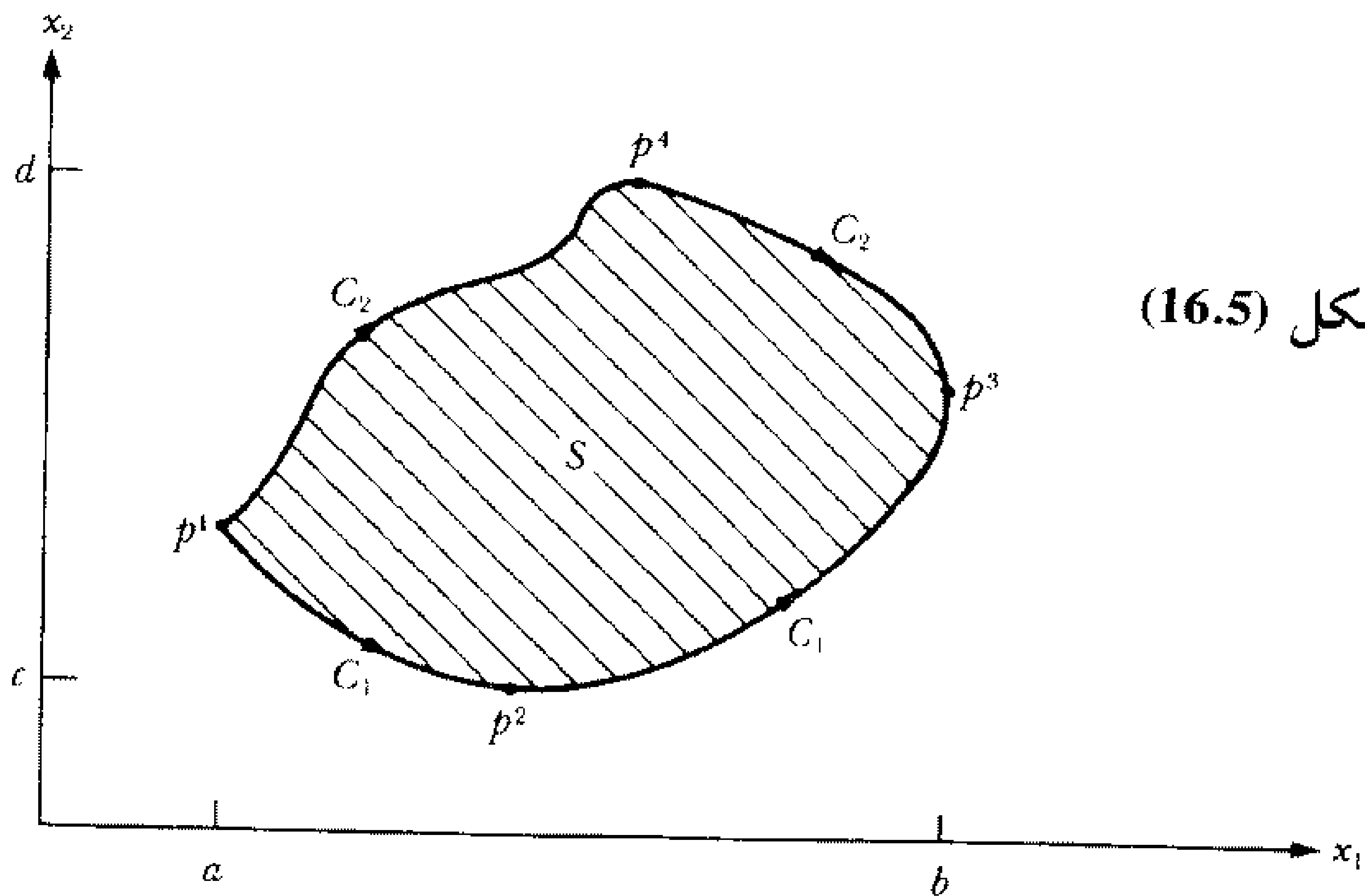
تعريف 16.9:

الفئة S في E^2 هي فئة أولية (elementary set) بشرط وجود دوال لها مشتقات متصلة u و υ و u^* وكذلك υ^* بحيث $u(t) \leqslant \upsilon(t)$ على $[a, b]$ و $u^*(t) \leqslant \upsilon^*(t)$ على $[c, d]$ و

$$S = \left\{\mathbf{x} : a \leqslant x_1 \leqslant b \quad , \quad u(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \upsilon(x_1)\right\}$$

و

$$S = \left\{\mathbf{x} : c \leqslant x_2 \leqslant d, \quad u^*(x_2) \leqslant x_1 \leqslant \upsilon^*(x_2)\right\}.$$



شكل (16.5)

(قارن ذلك بالفئة الواردة في المثال 16.2).

تُمثّل في الشكل 16.5 فئة أولية. ويشكّل المنحني C_2 تمثيلاً للدالة u من $\mathbf{p}^{(1)}$ إلى $\mathbf{p}^{(3)}$ خلال $\mathbf{p}^{(2)}$، وتمثيل الدالة υ هو المنحني C_2 من $\mathbf{p}^{(1)}$ إلى $\mathbf{p}^{(3)}$ خلال $\mathbf{p}^{(4)}$. وبالمثل فإن

تمثيل الدالة u^* والدالة υ^* يكون من $\mathbf{p}^{(2)}$ إلى $\mathbf{p}^{(4)}$ خلال $\mathbf{p}^{(1)}$ و $\mathbf{p}^{(3)}$ على التوالي. ان التكاملات الخطية التي نحن بصددها هنا تؤخذ على حدود الفئة S والتي تكون منحنى بسيطاً متقطع الملاسة ومغلقاً. هذا المنحنى يتم اختباره مرة واحدة فقط، ويجري التحرك في اتجاه تظل فيه الفئة S على اليسار عند اجتياز المنحنى C. على سبيل المثال، نستطيع اعتبار $C = C_1 \cup (-C_2)$ حيث:

$$C_1 = \{(t, u(t)) : a \leqslant t \leqslant b\}$$

ويكون

$$C_2 = \{(t, \upsilon(t) : c \leqslant t \leqslant d\}.$$

تكمن ايجابية وجود فئة أولية S كنطاق للتكامل في أن التكامل $\iint_S f$ يمكن حسابه على أنه عمليتي تكامل - ريماني متكرر، واحدة في كل احداثي. لتوضيح ذلك نتصور شبكة على مستطيل يحتوي S. التكامل $\iint_S f$ هو نهاية المجاميع ذات الشكل:

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant m}} f(\mu_{ij})\, A(R_{ij})$$

عندما يكون R_{ij} المستطيل في الصف ذي الترتيب i وفي العامود ذي الترتيب j. ويمكن حساب الحدود mn في هذا المجموع بجمع الحدود الرأسية (أي تكون j ثابتة) ثم بجمع n من الأعمدة الجزئية لإيجاد قيمة المجموع. إذن فإن:

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant m}} f(\mu_{ij})\, A(R_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} f(\mu_{ij})\, A(R_{ij}) \right\}. \qquad (1)$$

لندرس المجموع الداخلي عندما تكون j ثابتة:

$$\sum_{i=1}^{m} f(\mu_{ij})\, A(R_{ij}) = (t_j - t_{j-1}) \sum_{i=1}^{m} f(\mu_{ij})\, (s_i - s_{i-1}). \qquad (2)$$

حيث:

$$R_{ij} = \{\mathbf{x} : t_{j-1} \leqslant x_1 \leqslant t_j,\ S_{i-1} \leqslant x_2 \leqslant S_i\}.$$

يُعتبر الطرف الأيمن في (2) وعلى وجه التقريب مجموعاً ريمانياً للدالة $f(x_1, s)$ على الفترة

$u(x_1) \leqslant s \leqslant v(x_1)$ ، عندما يكون x_1 ثابتاً في الفترة $[t_{j-1}, t_j]$. هذا المجموع لا يساوي بـالضبط المجمـوع الـريمـاني للدالـة $f(x_1, t)$ ؛ لأن النقط μ_{ij} ليس بـالضرورة تكـون ذات الإحداثي الأول نفسه x_1 . ويؤول هذا إلى الصفر وعلاوة على ذلك إذا كانت f متصلة فـإن المجموع (1) يُقرّب إلى :

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{u(t)}^{v(t)} f(t, s)\, ds \right\} (t_j - t_{j-1}). \tag{3}$$

لـلأسبـاب نفسهـا نجـد أن التعبـير (3) يُقـرّب إلى جمـع ريمـاني لتكـامـلٍ مـا عـلى الفــترة $a \leqslant t \leqslant b$. إذن نجد أن:

$$\iint_S f = \int_a^b \left\{ \int_{u(t)}^{v(t)} f(t, s)\, ds \right\} dt. \tag{4}$$

إن الخطوات التي قادتنـا الى (4) تحتاج بعض التفـاصيل، ولكن القـارىء المهتم يستطيـع أن يتحقق من ذلك بالاستنـاد إلى خاصيّـة الاتصال للدالـة f (انظر التـمارين 16.7.2) . ونستعد الآن لبرهنة النتيجة التي تربط فكرتي التكامل المنحني والتكامل الثنائي .

نظرية 16.12 : (نظرية جرين) .

إذا كانت S فئة أولية ومنحني حدودها C وإذا كانت P و Q و P_2 وكذلك Q_1 دوال متصلة على النطاق D الذي يحتوي S. لنفترض أن $C = \{(g(t), h(t))\}$ ، فإن

$$\iint_S (Q_1 - P_2) = \int_C [P\, dg + Q\, dh]. \tag{5}$$

البرهان :

يمكن أن يُكتب كلٌ من التكاملان في (5) على شكل مجموع تكاملين، ولهذا نـرغب في أن نبرهن :

$$\iint_S Q_1 - \iint_S P_2 = \int_C P\, dg + \int_C Q\, dh.$$

نبرهن هنا أن

$$\iint_S P_2 = -\int_C P\, dg. \tag{6}$$

ويمكن للتكامل الآخر أن يبرهن بالطريقة نفسها. باستخدام (4) يمكن أن نحسب الطرف الأيمن على أنه تكامل متكرر:

$$\iint_S P_2 = \int_a^b \int_{u(t)}^{v(t)} P_2(t, s)\, ds\, dt$$

باستخدام النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل نجد أن التكامل الداخلي:

$$\int_{u(t)}^{v(t)} P_2(t, s)\, ds = P(t, v(t)) - P((t, u(t)).$$

كما لاحظنا سابقاً فإن $C = C_1 \cup (C_2)$ ، عندما تكون C_1 و C_2 على الشكل التالي:

$$C_1 = \{(t, u(t)) : a \leqslant t \leqslant b\}$$

و

$$C_2 = \{(t, v(t)) : a \leqslant t \leqslant b\}.$$

إذن لدينا:

$$\iint_S P_2 = \int_a^b P(t, v(t))\, dt - \int_a^b P(t, u(t))\, dt. \tag{7}$$

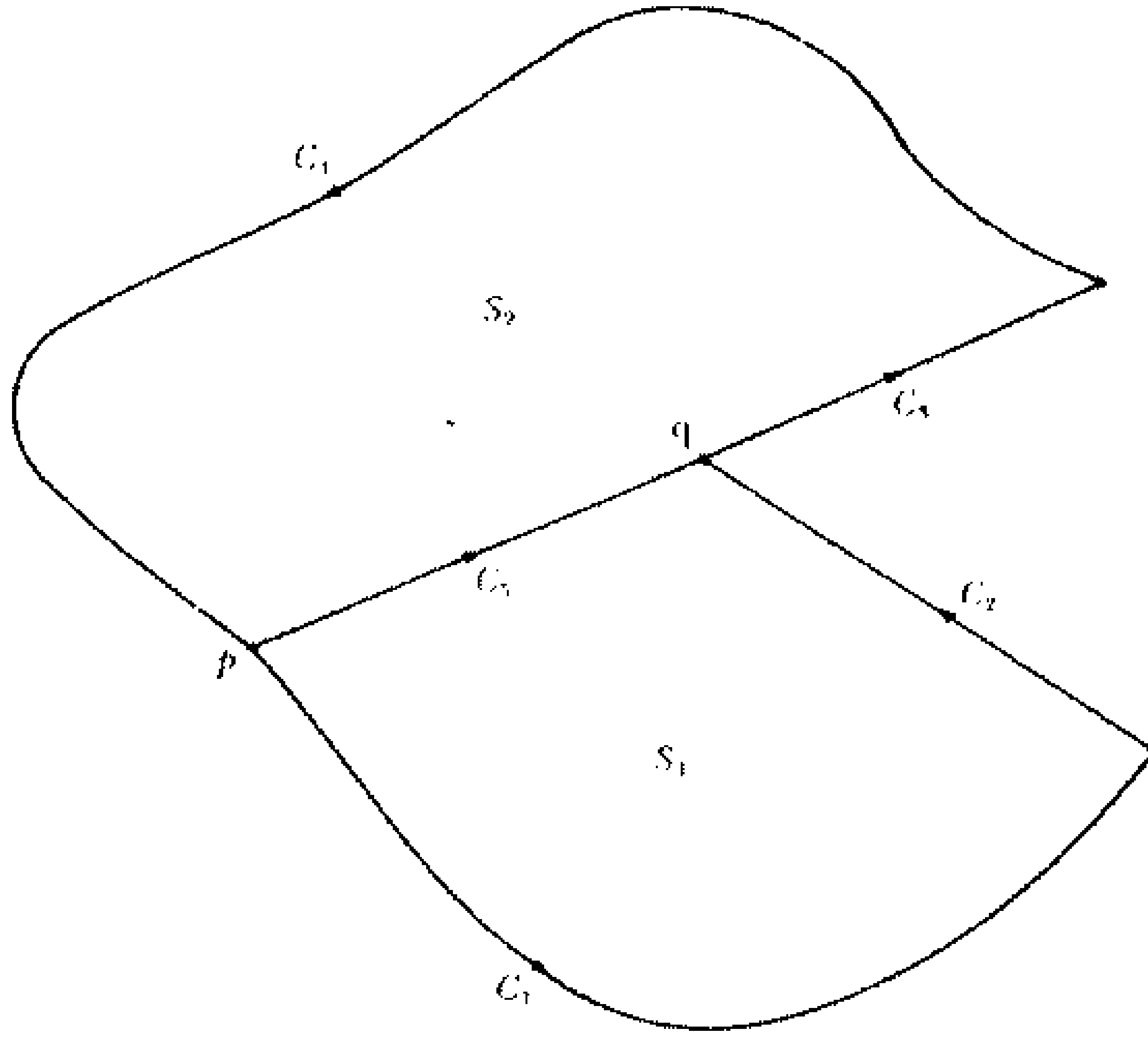
وبتعويض $g(t) = t$ في الجانب الأيمن من (7)، نحصل على:

$$\iint_S P_2 = -\int_{-C_2} P\, dg - \int_{C_1} P\, dg = -\int_{C_1 \cup (-C_2)} P\, dg = -\int_C P\, dg.$$

وهذا ينهي البرهان.

ليس من الصعب أن نرى أن النظرية 16.12 يمكن أن تشمل الحالة التي تتكون فيها S من اتحاد نهائي من الفئات الأولية. ونوضح ذلك ببرهنة الحالة التي تتكون من اتحاد فئتين أوليتين كما هو موضّح في الشكل 16.6. لنفرض أن P، Q، P_2 وكذلك Q_1 دوال متصلة على $S = S_1 \cup S_2$. وتُعطى حدود S بـ $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ ويؤخذ المنحني C_5 من **p** إلى **q**، بذلك لدينا:

$$b_2[S] = C_5 \cup C_3 \cup C_4 \quad \text{و} \quad b[S_2] = C_1 \cup C_2 \cup (-C_5)$$



شكل (16.6)

إذن فإن:

$$\int_C [P\,dg + Q\,dh] = \int [P\,dg + Q\,dh]$$

$$= \int_{C_1 \cup C_2 \cup (-C_3)} [P\,dg + Q\,dg] + \int_{C_5 \cup C_3 \cup C_4} [P\,dg + Q\,dh]$$

$$= \iint_{S_1} (Q - P_2) + \iint_{S_1} (Q_1 - P_2)$$

$$= \iint_{S_1 \cup S_2} (Q_1 - P_2)$$

$$= \iint_{\Sigma} (Q_1 - P_2).$$

لقد جعلت نظرية جرين حساب تكامل التفاضل التام سهلاً، كما سنرى في النظرية التالية.

نظرية 16.13:

إذا كانت P و Q و P_2 وكذلك Q_1 دوال متصلة على النطاق D وإذا كان $C = \{g(t), h(t)\}$ منحني متقطع الملاسة في D أي حدوداً لفئة أولية S، ولنفرض أن التعبير $P\,dg + Q\,dh$ تفاضل تام في D، فإن:

$$\int_C [P\,dg + Q\,dh] = 0$$

البرهان:

ان التفاضل التام $P\,dg + Q\,dh$ يؤدي إلى وجود دالة f على S بحيث إن $f_1 = P$

و $f_2 = Q$. نكتب $f_{12} = P_2$ و $f_{21} = Q_1$ ونستخدم النظرية 15.6 لنعرف أن هذه المشتقات الجزئية المختلطة متساوية. إذن فإن $Q_1 - P_2$ يساوي الصفر خلال S (انظر التمرين 16.5.5). وهكذا استناداً إلى نظرية جرين، نجد أن:

$$\iint_C [P\,dg + Q\,dh] = \iint_S [Q_1 - P_2] = \iint_S 0 = 0.$$

16.7 نظائر نظرية جرين

Analogues of Green's Theorem

نناقش في هذا البند النهائي نظريات مماثلة لنظرية جرين بدون إعطاء براهين لهذه النتائج، على الرغم من ذلك فطلبة التفاضل والتكامل للمتغيرات المتعددة يميزون هذه النتائج بسهولة. هدفنا الحاضر هو اعطاء نظرية عامة تكون نظرية جرين جزءاً منها. نبدأ باختبار شكل هذه النتيجة. نفرض أن f دالة معرّفة على نطاق مفتوح D يحتوي على الفئة S، وأن df يدل على تعبير تفاضلي يحتوي على المشتقة الأولى أو التفاضل الجزئي للدالة f. إذا رغبنا في تكامل df على S، عندئذٍ وبالاستناد الى نظرية جرين مع فروض مناسبة حول f و S، نحصل على القيمة نفسها إذا كاملنا f نفسها على الحدود S. رمزياً:

$$\iint_S df = \int_{b[S]} f. \tag{1}$$

بالطبع فإن نوع التكامل في الطرف الأيسر يختلف عن نوع التكامل في الطرف الأيمن من (1)، وكذلك على نطق مختلفة الأبعاد، ولكن النتيجة تؤكد أن تكامل دالة على حدود فئة يساوي تكامل تعبير تفاضلي على الفئة المغلقة. لقد رأينا سابقاً جملة مشابهة لهذه النتيجة، إذا قللنا الأبعاد بمقدار 1 فإن f تصبح دالة على الفترة $I = [a, b]$ و $df = f'$ ويكون $b[I]$ فئة النقطتين $\{a, b\}$، وبناءً على النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل فإن:

$$\int_I df = f(b) - f(a) = \int_{b[I]} f. \tag{2}$$

إنّ الطرف الأيمن من (2) هو رمز غير مُعرَّف ويمكن تعريفه على أساس أنه يساوي الحد الأوسط من (2). النقطة المهمة هي أن قيم f عند حدود I تحدد تكامل df على الفئة المغلقة.

يمكن صياغة المعادلة (1) في الوضعية ثلاثية الأبعاد. في هذه الحالة يمكن للفئة S أن تكون

سطحاً Σ في E^3 أو شكلاً مجسماً V. في الحالة الأولى لدينا نظرية ستوكس (Stokes's Theorem) حيث التكامل الخطي:

$$\int_{C=b[\Sigma]} [P\,dg + Q\,dh + R\,dv]$$

مساوياً للتكامل السطحي:

$$\iint_{\Sigma} \left[(Q_3 - R_2) + (R_1 - P_3) + (P_2 - Q_1)\right] d\sigma,$$

حيث تكون السطوح والدوال مناسبة. (الحدود $b[\Sigma]$ هي منحني يحتوي على السطح S). في الحالة الثانية يُطوِّق السطح Σ الشكل المجسم V و $f(x) = (P(x), Q(x), R(x))$ يكون تحويلاً من E^3 الى E^3. عندما تكون P و Q وكذلك R دوال على E^3 عندما يتم تكامل حاصل الضرب القياسي $f \cdot d\sigma$ على حدود السطح، تكون النتيجة هي نفسها التكامل الحجمي نفسه لِـ $df = (P_1 + Q_2 + R_3)\,dV$ المأخوذ على V:

$$\iint_{\Sigma=b[V]} f \cdot d = \iiint_{V} df. \qquad (3)$$

هذه هي نظرية جاوس للتباعد ومضمون المعادلة (3) هو مرة أخرى: ان تكامل دالة على حدود فئة يساوي تكامل التعبير التفاضلي على الفئة التي تطوقها هذه الحدود.

ان نقاشاً ناجزاً لمواضيع نظرية ستوكس ونظرية جاوس للتباعد بتفاصيل يمكن أن يُقدَّم كجزء من التحليل الاتجاهي. في هذه الصيغة يمكن لقوة رموز ومفاهيم المتجه أن تسهل وصف أنواع مختلفة من الدوال والمنحنيات والسطوح كما أن علاقة الأنواع المختلفة من الدوال والمنحنيات والسطوح يمكن أن يتم التحقق منها بفعالية أكبر.

تمارين 16.7

1 ـ برهن التأكيد (4) في البند 16.6. (ارشاد: استخدم الاتصال المنتظم للدالة f لتحصل على النقط $\nu_{ij}, \dots, \nu_{mj}$ التي لها الاحداثي الثاني نفسه والتي تحقق:

$$\sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}} \left|f(\mu_{ij}) - f(\nu_{ij})\right| < \frac{\varepsilon}{A(S)}.$$

2 ـ أكمل برهان نظرية جرين وذلك ببرهنة: $\iint_S Q_1 = \iint_C Q\, dh.$

في التمارين من 3 إلى 7 استخدم نظرية جرين لحساب التكامل الخطي $\int_C [P\, dg + Q\, dh]$ للدوال والمنحنيات المعطاة. افترض أن المسار الاتجاهي للمنحنيات معطى بحيث تظل الفئة S على اليسار كلما اجتزنا المنحني.

3 ـ $P(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2$ و $Q(\mathbf{x}) = x_1 + 3x_2$ و C هو المسار المستطيل من $(0, 0)$ إلى $(0, 3)$ إلى $(3, 2)$ إلى $(0,2)$ إلى $(0, 0)$.

4 ـ $P(\mathbf{x}) = 2x_1x_2$ و $Q(\mathbf{x}) = x_1^2$ و C هو حدود الفئة المحدودة والمطوقة بالخط المستقيم $x_2 = x_1$ والقطع المكافىء $x_2 = x_1^2$.

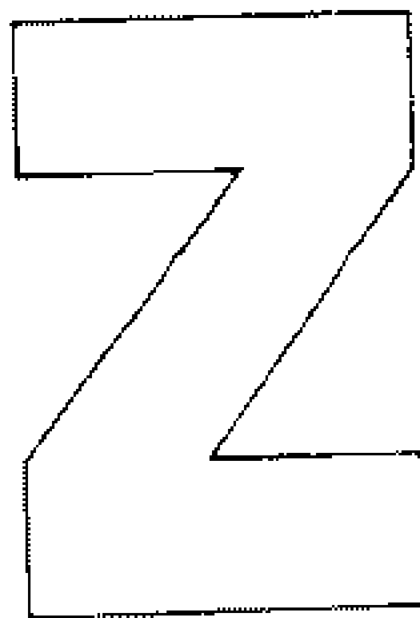
5 ـ $P(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2$ و $Q(\mathbf{x}) = 3x_1 - x_2$ و C هو حدود $\mathbf{N}_2(\mathbf{0})$.

6 ـ $P(\mathbf{x}) = 2x_1 \sin x_2$ و $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 \cos x_2$ و C هو القطع الناقص $5x_1^2 + 3x_2^2 = 1$.

7 ـ $P(\mathbf{x}) = x_1 - x_1^2x_2$ و $Q(\mathbf{x}) = x_2 + x_2^2x_1$ و C هو حدود ربع الدائرة:

$$S = \{\mathbf{x} \in E^2 : \|\mathbf{x}\| = 1,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

8 ـ بَيِّنْ امكانية تطبيق نظرية جرين(*) للتكامل على المنطقة ذات الشكل Z والموضحة كالآتي:



(1) للحصول على معلومات إضافية عن نظريات جرين وستوكس وجاوس والتكاملات المنحنية والسطحية وتطبيقاتها انظر كتاب: «مقدمة في التحليل الاتجاهي» تأليف هاري ف. دافيس، أرثور د. سنيدر»، ترجمة د. أحمد صادق القرماني، أ. الصادق عياد كرواط، من منشورات جامعة الفاتح ـ طرابلس ـ ليبيا.

(ملاحظة المترجم)

ملحق أ

الاستقراء الرياضي

Mathemathical Induction

هذه المناقشة ليست معالجة عامة لموضوع الاستقراء الرياضي. الطالب الذي وصل إلى مستوى هذا الكتاب لا بد أنه درس وقابل فكرة الاستقراء الرياضي بأساسياتها وربما بعرض أشمل للموضوع(*).

والغرض من هذا الملحق هو التوضيح وبمثال واحد كيف أن هذه الفكرة الرياضية الأساسية استخدمت عدة مرات في الدراسات النظرية التي قدمت في هذا الكتاب.

مبادىء الاستقراء الرياضي:

لنفرض أن T فئة جزئية من ℕ تحقق ما يلي:

(أ) 1 في الفئة T.

(ب) إذا كان n في الفئة T، فإن $n + 1$ في الفئة T.

فإنه ينتج منذ لك أن T هي كل ℕ.

لقد اختير الحرف T في مبادىء الاستقراء الرياضي بسبب الطريقة التي يتم فيها تطبيق

(*) يسمى الانتقال من العام إلى الخاص بالاستنتاج أو الاستدلال (deduction)، ويسمى الانتقال من الحالات الخاصة إلى الحالة العامة بالاستقراء (induction). وللحصول على دراسة وافية في موضوع الاستقراء الرياضي في الحساب والجبر والهندسية، انظر كتاب «الاستقراء الرياضي» مكتبة الرياضيات الحديثة جزء 2، ترجمة د. أحمد صادق القرماني، الصادر عن دار مير للطباعة والنشر موسكو 1980 ـ (ملاحظة المترجم).

هذه المبادىء في معظم الحالات. لنفرض أن $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الجمل ولنفرض أن T هي فئة الصواب (truth set) للمتتالية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$، أي أن:

$$T = \{n \in \mathbb{N}: S_n \ \text{(True) صواب}\}$$

ومن ذلك يمكن استنتاج أن S_n صحيحة لكل n وذلك بتوضيح أن T تحقق (أ) و (ب).

من خلال دراسة التفاضل والتكامل تعرفنا على تجمعات من الدوال تحقق بعض التعريفات ومن ثم برهنا على أن تجمعاً ما مغلقاً تحت عملية ما على عنصرين من عناصر التجمع، أي أنه عندما تجري عملية على عنصرين من عناصر التجمع تكون النتيجة في التجمع.

قد يتكوّن التجمع من المتتاليات التقاربية أو الدوال القابلة للتكامل، وطريقة دمج عنصرين من التجمع قد تكون عملية حسابية مثل الجمع أو الضرب أو قد تكون عملية أخرى مثل تراكب الدوال.

كل ما نريده هنا أن تكون العملية تنسيقية، أي:

$$(f \star g) \star g = f \star (g \star h).$$

في مثل هذه الحالة وعند برهنة خاصية انغلاق التجمع تحت التنسيق لأي عنصرين من عناصره فإن الاستقراء الرياضي يسمح لنا بالاستنتاج مباشرة أن التجمع مغلق تحت تركيب أي عدد نهائي من عناصره.

سنبرهن مثل هذه النتيجة هنا، وللملاءمة سنستخدم الاشارة الموجبة للدلالة على العملية الثنائية على التجمع C. ونستخدم الحرفين f و g للدلالة على عناصر C، لكن البرهان غير مقتصر على الحالة التي تكون فيها العملية جمعاً و C مؤلفة من دوال.

نفترض أن العملية تنسيقية وتحقق الشرط التالي:

إذا كان f و g في C فإن f + g في C. (1)

نظرية أ (1):

لنفرض أن C تجمعٌ مع عملية تنسيقية + تحقق (1).

إذا كـــان $\{f_0, f_1, f_2, ..., f_n\}$ فئـة جــزئـيــة مـنــتـهــيــة مـن C، فـــإن المجمـوع $f_0 + f_1 + ... + f_n$ في C.

البرهان:

لكـل n في ℕ نفترض أن S_n هي الجملة «لكـل فئة جـزئية $\{f_0, f_1, ..., f_n\}$ من C، فإن $f_0 + f_I + ... + f_n$ في C».

نرغب في برهنة أن فئة الصواب T من $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون ℕ.

نلاحظ أولاً أن S_1 هي بالضبط الخاصية (1)، إذن T تحقق (أ).

لـنـفــرض الآن أن n في T، أي أن لـكــل فئــة $\{f_0, f_1, ..., f_n\}$ في C تـكـون $f_0 + f_1 + ... f_n$ في C. لا بد أن نبرهن على أن $n + 1$ في T.

لذا نعتبر الفئـة الجزئيـة $\{f_0, f_1, ..., f_n, f_{n+1}\}$ اختياريـة من C. باستخـدام التنسيق يكون لدينا:

$$f_0 + ... + f_n + f_{n+1} = (f_0 + f_1 + ... + f_n) + f_{n+1}$$

وبافتراض أن $f_0 + ... + f_n$ في C فإن الخاصيـة (1) تؤدي إلى أن الطرف الأيمن مـوجود في C.

إذن $n + 1$ في T.

وهكذا فقد تم برهنة أن T هي كل ℕ بواسطة مبادىء الاستقراء الرياضي.

الملحق ب

الفئات القابلة للعد والفئات غير القابلة للعد

Countable and Uncountable Sets

من الطبيعي أن نستنتج من تجاربنا الأولية مع فئات الأعداد أنه إذا كانت هناك فئتان لانهائيتان فإنهما متساويتا الكبر. ومع ذلك من المفيد للغاية الاستعانة بمفهوم أكثر دقة للمقارنة بين الفئات الكبيرة. وقد طورت نظرية الأعداد الأساسية (الكاردينالية) وتكافؤ الفئات على يد كانتور في أعوام 1800 الأخيرة وتم إغناؤها بسرعة على أيدي كثير من علماء الرياضيات. ولن نتطرق كثيراً إلى تفاصيل هذه النظرية بعمقها في هذه المناقشة، ولكننا نشجع القارىء على البحث في مصادر أخرى وتتبع النظرية بعد هذه المناقشة.

تعريف ب (1):

الفئة S قابلة للعد (countable) إذا كان هناك متتالية مداها كل S. وإذا لم تكن الفئة قابلة للعد فإنها تسمى غير قابلة للعد (uncountable).

وهذا التعريف يحدد عدد العناصر في الفئة القابلة للعد S بمعنى أنه يوجد على الأقل عدد واحد صحيح موجب يناظر كل عنصر من عناصر S. وبذلك فلا يمكن وجود عناصر في S «أكثر» من عناصر $\mathbb{N}$. ونورد هنا أمثلة على فئات قابلة للعد يسهل التحقق منها:

(1) الفئة $\mathbb{N}$ نفسها.

(2) فئة الأعداد الزوجية الموجبة $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

(3) أية فئة جزئية من $\mathbb{N}$.

(4) أية فئة نهائية.

والمثال الثالث يمكن تعميمه بتأكيد أعم نثبته فيما يلي:

مفترض ب (1):

أية فئة جزئية من فئة قابلة للعد هي فئة قابلة للعد.

البرهان:

نفرض أن S قابلة للعد، ونفرض أن T أية فئة جزئية من S، عندئذٍ هناك متتالية S بحيث إن:

$$s = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$$

نفرض أن t متتالية جزئية من S تناظر تلك الأعداد الصحيحة n(k) بحيث إن $s_{n(k)} \in T \subseteq s$. بذلك فإن $T = \{s_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ وهكذا أثبتنا أن T هي مدى المتتالية t.

وعلى الرغم من أن مفترض ب (1) مفيد للغاية، فإنه من المدهش أكثر ملاحظة ماذا يحدث عندما نوسع الفئات القابلة للعد بتجميع عدد كثير منها. على سبيل المثال نفرض أن $S = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ وأن $T = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ فئتان قابلتان للعد. نؤكد أن اتحادهما هو أيضاً فئة قابلة للعد؛ لأن: $\{s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3, \ldots\}$ متتالية كما هو واضح مداها $S \cup T$. وبالمثل يكون اتحاد ثلاث فئات قابلة للعد U و T و S فئة قابلة للعد بالمتتالية $\{s_1, t_1, u_1, s_2, t_2, u_2, \ldots\}$. ومن السهل إثبات (بالاستعانة بمبدأ الاستقراء الرياضي) أن اتحاد أي تجمع نهائي من الفئات القابلة للعد يكون هو هو فئة قابلة للعد، والنتيجة التالية تأخذ هذا الاستنتاج خارج مجال الاستقراء الرياضي.

نظرية ب (1):

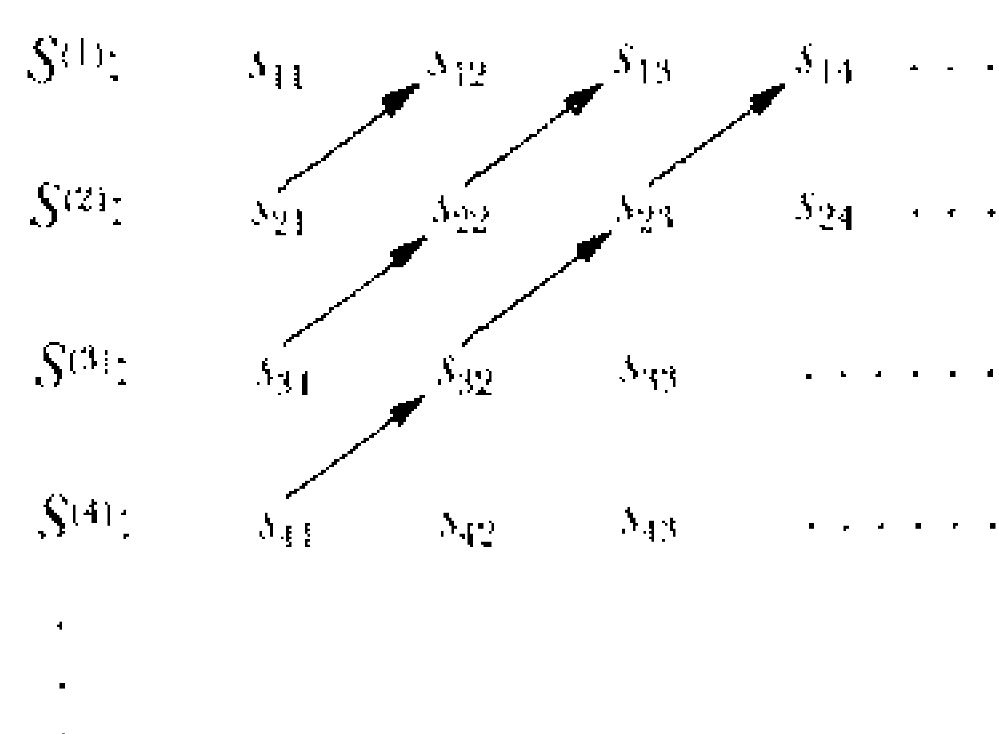
اتحاد تجمع قابل للعد من فئات قابلة للعد هو فئة قابلة للعد.

البرهان:

لكل n من $\mathbb{N}$ نفرض أن $S^{(n)}$ الفئة القابلة للعد $\{s_{nk} : k \in \mathbb{N}\}$. ونرغب في إثبات أن الفئة $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(n)}$ فئة قابلة للعد، ويمكن أن نرتب S في التشكيل (array)

المبيّن في الشكل ب (1). وتشير الأسهم إلى كيفية كتابة عناصر S بدلالة المتتالية، وبالذات فإنّ:

$$\left\{S_{11}, S_{21}, S_{12}, S_{31}, S_{22}, S_{13}, S_{41}, S_{32}, S_{23}, S_{14}, \ldots\right\}$$



شكل **((B-1)**

لاحظ أن مجموع الدليلين السفليين لكل حد يكون ثابتاً على امتداد القطر. وبذلك نورد قائمة بالحدود في مجموعات وفقاً لمجموع أدلتها السفلية:

في القطر الأول المجموع هو 2،

في القطر الثاني المجموع هو 3،

.

.

.

في القطر رقم J المجموع هو J + 1،

.

.

.

لكل حد s_{nk} في S يكون المجموع $n + k$ مساوياً للعدد الصحيح j، ولذا ينتج أن كل حد من S يظهر في مكان ما في المتتالية المذكورة قبل قليل.

ومن ثم فإن S هي مدى هذه المتتالية، وبالتالي فإنّ S فئة قابلة للعد.

مثـال ب (1):

الفئة $\mathbb{Q}$ (فئة الأعداد القياسية) هي فئة قابلة للعد؛ لأنه إذا كانت

$S^{(n)} = \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{N} \right\}$ ، عندئذٍ تتكوّن $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(n)}$ من كل الأعداد القياسية الموجبة وهي قابلة للعد وفقاً للنظرية ب (1). وبالمثل تكون فئة الأعداد القياسية السالبة قابلة أيضاً للعد. وكذلك تكون الفئة المفردة {0} . وحيث إن $\mathbb{Q}$ هي اتحاد هذه الفئات الثلاث القابلة للعد فإنه ينتج أن $\mathbb{Q}$ نفسها فئة قابلة للعد.

وقد يبدو حتى الآن أن كل الفئات مُفْترض أن تكون قابلة للعد، ولكن ذلك يعني أننا لم نكسب شيئاً إضافياً زيادة عن وجهة نظرنا الأولى حول أن كل الفئات اللانهائية «متساوية في الكبر». غير أن هذا ليس هو واقع الحال كما سنثبت ذلك في النظرية التالية.

نظرية ب (2):

الفئة $\mathbb{R}$ (فئة الأعداد الحقيقية) هي فئة غير قابلة للعد.

البرهان:

لكي نبيّن عدم وجود متتالية مداها هو كل $\mathbb{R}$، نفرض أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية اختيارية من الأعداد الحقيقية ونبين أنه يوجد عدد واحد على الأقل ليس حداً في هذه المتتالية. نفرض بعد ذلك أن كل x_n في الفترة $[0, 1)$. ويمكن كتابة كل x_n في صورة عشرية، لنَقُلْ:

$$x_n = \cdot d_{n1} \, d_{n2} \, d_{n3} \, \dots ,$$

حيث كل d_{nk} هو رقم (digit) (أي 0، 1، . . . ، أو 9). ويمكن ترتيب المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ كما في الشكل ب (2).

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 = & \boxed{.d_{11}} & d_{12} & d_{13} & \dots & & \\
x_2 = & .d_{21} & \boxed{d_{22}} & d_{23} & \dots & & \\
x_3 = & .d_{31} & d_{32} & \boxed{d_{33}} & \dots & & \\
\vdots & & & & & & \\
x_n = & .d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \dots & \boxed{d_{nn}} & \dots \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

شكل (B-2)

وفي الشكل ب (2) وضعت المتتالية من n من الأرقام الصحيحة للعد n في مربعات لأنها تتكوّن من تلك الأرقام التي نكّون منها العدد $y = \cdot\, \delta_1\, \delta_2\, \delta_3 \ldots$ ، وهو مختلف عن كل من الأعداد x_n.

والعدد y معرف بواسطة وصف رقمة ذي الترتيب n وهو δ_n . ونريد الحصول على أن $\delta_n \neq d_{nn}$ ، ولذا نعرف:

$$\delta_n = \begin{cases} 7, & d_{nn} \leqslant 5, \\ 3, & d_{nn} > 5. \end{cases}$$

وبذلك فإن y هو عدد في فترة [0,1). وأيضاً لا يمكن لِـ y أن تساوي أي عدد من الـ x_n لأنه لكل n يكون $\delta_n \neq d_{nn}$ ، ومن ثم فإن y، x_n يختلفان على الأقل في رقميهما العُشْريين ذي الترتيب n. (لاحظ أن y لا يمكن تدويره ليساوي عدداً من x_n بالطريقة التي يدور فيها ...49999. لـ 'وي ...50000؛ لأن y ليس له تسعات في مفكوكه العشري). ومن ثمّ فالمتتالية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ لا تحتوي ضمن حدودها كل الأعداد في [0, 1) . وهذا يثبت أن الفئة [0, 1) غير قابلة للعد، وحيث إن $\mathbb{R}$ تحتوي على [0, 1) فإنه ينتج من المفترض ب (1) أن $\mathbb{R}$ أيضاً غير قابلة للعد.

نتيجة ب (2):

فئة الأعداد غير القياسية غير قابلة للعد.

البرهان:

إذا كانت فئة الأعداد غير القياسية X قابلة للعد، لأمكننا أن نكتب $\mathbb{R} = Q \cup X$ ، ولكانت النظرية ب (1) تضمّنت أن $\mathbb{R}$ قابلة للعد.

الملحق ج

الضرب اللانهائي Infinite Products

مفهوم الضرب اللانهائي هو النظير الضربي للمتسلسلات اللانهائية.

عادة يحذف موضوع كهذا من كتاب في هذا المستوى. على الرغم من ذلك فإن الضرب اللانهائي نافع جداً في بعض الفروع الرياضية مثل نظرية الأعداد ونظرية الدوال المركبة (complex)، نوضح هنا ولغرض دراسة تقارب الضرب اللانهائي أنه يكفي دراسة المتسلسلات اللانهائية.

إذا كانت $\{a_k\}$ متتالية عددية، نعرّف المتتالية المرتبطة بها $\{p_n\}$ بالصيغة:

$$p_n = a_1 a_2 \dots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k .$$

إن $\{p_n\}$ هي متتالية الضرب الجزئي للضرب اللانهائي $\prod a_k$. (استخدم الحرف الكبير $\prod$ لـ «الضرب» للتشديد على نظيره في المتسلسلة حيث نكتب حرف سيغما كبير Σ للدلالة على المجموع).

غالباً من الضروري أن نفترض بسبب الخواص الضربية للعدد صفر أن a_k غير صفري لكل k.

تعريف ج (1):

الضرب اللانهائي $\prod a_k$ تقاربي بشرط أن متتالية حواصل ضربه الجزئي تتقارب إلى

نهاية غير صفرية. في حالة التقارب، نكتب:

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \prod_{k=1}^{n} a_k \right\},$$

وهذه النهاية العددية تسمى قيمة الضرب اللانهائي.

وفي الحالة عندما تتقارب متتالية الضرب الجزئي إلى الصفر، نقول أن $\prod a_k$ تباعدية إلى الصفر.

من الواضح أن هذه نتيجة في حالة كونِ أي حد a_k مساوياً للصفر.

قد يتبادر إلى الذهن بأن رفض النهاية الصفرية استثناء اختياري ولكن هذا افتراض ضروري لتفادي أن تنتج بعض المتتاليات الشاذة ضرباً لانهائي تقاربياً.

على سبيل المثال، إذا كان $a_{k^*} = 0$ لبعض k^*، فإن $\{a_k\}$ متتالية غير محدودة أو ذات أي قيمة نرغب فيها لكل $k \neq k^*$ ومع ذلك فإن:

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = 0. \quad \text{لكل} \quad n \geqslant k^*$$

هذه ليست الطريقة الوحيدة التي يكون فيها الضرب اللانهائي غير تقاربي.

مثال ج (1) ومثال ج (2) يوضحان نوعين آخرين من الضرب اللانهائي غير التقاربي ومثال ج (3) يوضح لنا ضرباً لانهائياً تقاربياً.

مثال ج (1):

إذا كان $a_k = (-1)^k$، فإن $p_n = (-1)^n$ و $\prod a_k$ غير تقاربي.

مثال ج (2):

إذا كان $a_k = \frac{(k+1)}{k}$، فإن:

$$p_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \; \cdots \; \frac{(n+1)}{n} = n + 1.$$

إذن $\lim_n p_n = \infty$ و $\prod a_k$ غير تقاربي.

مثـال ج (3):

إذا كان $a_{2k-1} = \frac{(k+1)}{k}$ و $a_{2k} = \frac{k}{(k+1)}$ ، فإن

$$\{a_k\} = \left\{\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$$

و

$p_{2n-1} = \frac{(n+1)}{n}$ و $p_{2n} = 1$.

إذن فإن $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = 1$.

النتيجة التاليـة يمكن تمييزهـا على أنها نـظير النظريـة المساعـدة 9.10 في موضـوع المتسلسلات اللانهائية .

نظرية مساعدة ج (1):

إذا كان $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ متقارباً (تقاربياً)، فإن $\lim_n a_n = 1$.

البرهان:

لنفرض أن $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = L \neq 0$ ، فإن:

$$\lim_n a_n = \lim_n \left(\frac{P_n}{P_{n-1}} \right) = \frac{\lim_n p_n}{\lim_n p_{n-1}} = \frac{L}{L} = 1.$$

نهي هـذه المناقشـة بنظريـة بسيطة تـربط بين الضرب الـلانهائي المتقارب وبـين المتسلسلات اللانهائية .

نظرية ج (1):

إذا كان $\prod_k$ تقاربياً، فإن $\Sigma \log |a_k|$ تقاربية . وإذا كانت $\Sigma \log |a_k|$ تقاربيـة وكان $a_k > 0$ لبعض k أكبر من بعض N ، فإن $\prod a_k$ تقاربي .

البرهان:

إذا كان $\prod a_k$ تقاربياً، تضمن لنا الـنظرية المسـاعدة ج (2) أن الحـد العام a_k مـوجب عندما تكون k كبيرة بما فيه الكفاية .

إذن يمكن أن نفترض بدون فقدان للعمومية أن $a_k > 0$ لكل k.

الآن:

$$\lim_n \left\{ \sum_{k=1}^{n} \log a_k \right\} = \lim_n \left\{ \log \prod_{k=1}^{n} a_k \right\}$$

$$= \lim_n \left\{ \log p_n \right\},$$

ويضمن اتصال الدالة $\log x$ بالاضافة للمعيار المتتالي للاتصال أن النهاية موجودة.

لبرهنة العكس، نستطيع مرة أخرى افتراض أن $a_k > 0$ لكل k.

إذا كان $s_n = \sum_{k=1}^{n} \log a_k$ ، فإن:

$$s_n = \log p_n \quad \text{أو} \quad e^{s_n} = p_n$$

وهكذا فإن تقارب $\{s_n\}$ واتصال الدالة x^x يتضمّنان أنّ $\{p_n\}$ تقاربية.

قائمة بالمصطلحات
المستخدمة في الكتاب

(A)

Absolutely Convergent	تقارب مطلق
Additive function	دالة جمعية
Aggregate	مجمل (مجموع)
Affine	أفيني
Algebraic Combination	تركيبة خطية
Accumulation point	نقطة تراكم
Analytic function	دالة تحليلية
Array	تشكيل (مجموعة مرتبة)
Alternatig series	متسلسلة متعاقبة الاشارة
Asymptote	محور تقارب
Axion	مسلمة
Order axions	مسلمة الترتيب
The least upper bound axion	مسلمة أصغر حد أعلى
Associative property	خاصية التنسيق
Approximation	تقريب
Average	متوسط

(B)

Basis vector(s)	متجه الأساس (المتجهات الأساسية)
Boundary	حدود
Bonnded set	فئة محدودة
Binary operation	عملية ثنائية
Boundary point	نقطة حدود
Bilinearity	خطية ثنائية
Binomial coefficients	معاملات ذات الحدين
Bracket function	الدالة السُلَّمِيَة
Bounded variation	تغير (تغاير) محدود

(C)

Class	فصل
Collection	تجمع
Completeness	كمال
Complex numbers	أعداد مركبة
Complex function	دالة مركبة
Cauchy sequences	متتاليات كوشي
Cauchy Criterion for Convergence	معيار كوشي للتقارب
Convergent	تقاربي (متقارب)
Cartesian product	حاصل الضرب الكرتيزي
Cover	غطاء
Continuity	اتصال (استمرار)
Cantor	كانتور
Convergence	تقارب
Connected set	فئة مترابطة
Countable set	فئة قابلة للعد
Composition of functions	تراكيب الدوال
Chain rule	قاعدة السلسلة

Closure	انغلاق
cluster point	نقطة عنقودية أو نقطة التراكم
Compact	مدمج
Criterion	معيار
Composite function	دالة تراكبية

(D)

Dedekind cut	قطع ديدكند
Divergent	تباعدي (متباعد)
Discontiuons function	دالة منفصلة
Distributive property	خاصية التوزيع
Disjoint	غير متصلة (منفصلة)
Domain	نطاق
Dot product	حاصل الضرب القياسي
Discrete metric	المترية المنفصلة
Dual	ثنائي
Distance function	دالة البعد
Dominance	هيمنة
Directional derivative	مشتقة اتجاهية
Dense set	فئة كثيفة
Discontinuity	انفصال
Deduction	استنتاج (استدلال)
Disk	قرص
Dot product	حاصل الضرب القياسي

(E)

Elementary set	فئة أولية
Euclidean space	فراغ اقليدي
Exact differential	تفاضل تام

Even	زوجي
Even index	دليل زوجي

(F)

Factorial	مضروب
Function	دالة
Finite set	فئة منتهية

(G)

Gamma function	دالة جاما
Geometric sequence	متتالية هندسية
Greatest integer function	دالة أكبر عدد صحيح (الدالة السُلَّمِية)
Createst Lower bound	أكبر حد أسفل
Green theorem	نظرية جرين

(H)

Half-closed interval	فترة نصف مغلقة
Harmonic sequence	متتالية توافقية
Hypothesis	فرض (افتراض)

(I)

Image	صورة
Implicit function	دالة ضمنية
Improper integral	تكامل معتل
Induction	استقراء
Infinite	لانهائي ـ لامحدود
Initial	ابتدائي
Integrability	القابلية للتكامل
Inner product	ضرب داخلي

Isolated point	نقطة منعزلة
Irrational numbers	أعداد لاقياسية
Infimum	الأدنى (العنصر الأدنى)
Inner area	مساحة داخلية
Instantaneous	آني - لحظي
Integrand	مكامل
Integrater	مكامل به
Interval	فترة
Iterated	متكرر

(J)

Jordan content	محتوى جوردان
Jump	قفزة

(K)

Kummer's test	اختبار كومر

(L)

Limit point	نقطة نهاية
Lemma	نظرية مساعدة
Leibnitz rule	قاعدة ليبنتز
Line integral	تكامل خطي (منحني)
Linear transformation	تحويل خطي
Laplace transform	تحويل لابلاسي
Lebesgue measure	قياس ليبيج (ليبيغ)
Least upper bound	أصغر حد أعلى
Lower sum	المجموع السفلي

(M)

Mean value theorem	نظرية القيمة الوسطى

Metric space	فضاء (فراغ) متري
Monotonic function	دالة مطّردة
Mixed partial derivatives	المشتقات الجزئية المختلطة
Mapping	راسم (اقتران ـ تحويل)
Matrix	مصفوفة

(N)

Nested intervals	فترات متداخلة
Negation	نفي
Nearly continuous	قريبة الاتصال
Neighborhood	جوار
Norm	معيار (مقياس)
Net	شبكة

(O)

One-Sided continuity	اتصال أحادي الجانب
Open cover	غطاء مفتوح
Open interval	فترة مفتوحة
Outer area	مساحة خارجية

(P)

Partial derivative	مشتقة جزئية
Partition	تجزيء
Piecewise continuous	متقطع الاتصال
Pointwise continuity	اتصال نقطي
Postulate	مسلمة
Proposition	مفترض

Psiudo-limit	شبه نهاية
Polynomial	كثيرة حدود

(R)

Ruabe's test	اختبار رابي
Radius of convergent	نصف قطر التقارب
Range	مدى
Ratio test	اختبار النسبة
Real number	عدد حقيقي
Rearrangement of series	اعادة ترتيب حدود المتسلسلة
Refienement	تدقيق
Remainder term	الحد الباقي
Removable discontinuity	انفصال قابل للإزالة
Riemann integral	تكامل ريمان (ريماني)
Right-hand limit	نهاية من اليمين
Root test	اختبار الجذر

(S)

Sectionally smoth curve	منحني متقطع الملاسة
Sequence	متتالية
Sequential criterion	المعيار المتتالي (التتابعي)
Shifting property	خاصية الإزاحة
Subcover	غطاء جزئي
Symmetry	تماثل
Supremum	الأعلى (العنصر الأعلى)

(T)

Taxicab metric	التاكسياب المتري

Terminal point	النقطة النهائية
Theorem	نظرية
Topology	طبولوجيا
Triangle Inequality	متباينة المثلث
Truth set	فئة الصواب

(U)

Uncountable set	فئة غير قابلة للعدّ
Uniform continuity	اتصال منتظم
Uniform convergence	تقارب منتظم
Upper bound	حد أعلى

(V)

Variation	تغير (تغاير)

(W)

Well-ordering principle	مبدأ حسن الترتيب
Well-posed	حسنة الصياغة
Weierstrass M-test	اختبار M لڤيرشتراس

(Z)

Zero of a function	صفر الدالة
Zero of a polynomial	صفر (أو جذر) كثيرة الحدود